BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN THỊ HỒNG

TOÁN TỬ TÍCH PHÂN LOẠI HARDY VÀ CÁC GIAO HOÁN TỬ CỦA CHÚNG TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2019

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN THỊ HỒNG

TOÁN TỬ TÍCH PHÂN LOẠI HARDY VÀ CÁC GIAO HOÁN TỬ CỦA CHÚNG TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9.46.01.03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. TSKH. Nguyễn Minh Chương
TS. Hà Duy Hưng

Hà Nội - 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH Nguyễn Minh Chương và TS Hà Duy Hưng. Các kết quả được phát biểu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất cứ luận văn, luận án nào khác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Thị Hồng

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn nghiêm khắc, tận tình, chu đáo của GS.TSKH Nguyễn Minh Chương và TS Hà Duy Hưng . Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc GS.TSKH Nguyễn Minh Chương và TS Hà Duy Hưng, những người đã dẫn dắt tác giả làm quen với nghiên cứu khoa học từ những ngày sau khi tốt nghiệp thạc sĩ. Ngoài những chỉ dẫn về mặt khoa học, sự động viên và lòng tin tưởng của các thầy dành cho tác giả luôn là động lực lớn giúp tác giả say mê trong nghiên cứu.

Tác giả xin trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng Sau đại học, Ban Chủ nhiệm khoa Toán-Tin, trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đặc biệt là các thầy, cô giáo trong Bộ môn Giải tích, khoa Toán-Tin, trường Đại học Sư phạm Hà nội đã luôn giúp đỡ, động viện, tạo môi trường học tập nghiên cứu thuận lợi cho tác giả.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Ban Giám hiệu trường Đại học Thủ đô Hà nội, các thầy, cô và các anh chị đồng nghiệp công tác tại Bộ môn Toán, khoa Khoa học Tự nhiên, trường Đại học Thủ đô Hà nội đã luôn tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin dành cho gia đình, những người luôn yêu thương, chia sẻ, động viên tác giả vượt qua khó khăn để hoàn thành luận án.

Tác giả

Mục lục

Lời cam đoan 1

Lời cảm ơn 2

Mục lục 3

MỞ ĐẦU 6

Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ 17

1.1. Trường các số p-adic 17

1.1.1. Chuẩn p-adic 17

1.1.2. Số p-adic 17

1.1.3. Không gian $\mathbb{Q}_p^d$ 18

1.2. Độ đo và tích phân trong $\mathbb{Q}_p^d$ 19

1.3. Các không gian hàm 22

1.3.1. Không gian Lebesgue 22

1.3.2. Không gian Herz 24

1.3.3. Không gian Morrey-Herz 25

1.3.4. Không gian BMO 26

1.3.5. Không gian Morrey trên trường p-adic 27

1.3.6. Không gian tâm Morrey trên trường p-adic 28

Chương 2. TOÁN TỬ P-ADIC HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN CÁC KHÔNG GIAN KIỂU MOREY 30

2.1. Đặt vấn đề 30

2.2. Chuẩn của toán tử $U_{\psi,s}^p$ trên các không gian kiểu Morrey . . 32

2.3. Giao hoán tử của toán tử p-adic Hardy-Cesàro 37

2.3.1. Các giao hoán tử và bổ đề bổ trợ 37

2.3.2. Các kết quả chính 38
2.3.3. Chứng minh kết quả chính 40

Chương 3. TOÁN TỬ ĐA TUYẾN TÍNH P-ADIC HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM P-ADIC 45
3.1. Đặt bài toán 45
3.2. Chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro trên tích các không gian Lebesgue và tích các không gian kiểu Morrey 47
3.2.1. Một số khái niệm và bổ đề 47
3.2.2. Các kết quả chính 49
3.3. Tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử song tuyến tính Hardy- Cesàro có trọng 54
3.3.1. Các giao hoán tử 54
3.3.2. Các kết quả chính 56
3.3.3. Chứng minh kết quả chính 57

Chương 4. TOÁN TỬ ĐA TUYẾN TÍNH HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN TÍCH CÁC KHÔNG GIAN LOẠI HERZ 67
4.1. Đặt vấn đề 67
4.2. Tính bị chặn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz và Morrey-Herz. 69
4.2.1. Một số khái niệm và bổ đề 70
4.2.2. Các kết quả chính 71
4.2.3. Chứng minh kết quả chính 73
4.3. Giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro . . . 78
4.3.1. Các kết quả chính 78
4.3.2. Chứng minh kết quả chính 79

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN 87

TÀI LIỆU THAM KHẢO 88

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{R}^d$	không gian vectơ Euclid d-chiều
$\|x\|$	chuẩn của một phần tử x trong $\mathbb{R}^d$
$\|x\|_p$	chuẩn p-adic của số p-adic x
$\mathbb{Q}_p$	trường các số p-adic
$\mathbb{Q}_p^d$	không gian véc tơ d chiều trên trường các số p-adic
$B(a,\gamma), B_\gamma$	hình cầu đóng tâm a, tâm 0 bán kính p^γ
$S(a,\gamma), S_\gamma$	mặt cầu tâm a, tâm 0 bán kính p^γ
dx	độ đo Haar
L^r	tập các hàm khả tích bậc r trên $\mathbb{R}^d$
L^r_{loc}	tập các hàm khả tích địa phương bậc r trên $\mathbb{R}^d$
$L^r(\omega)$	tập các hàm khả tích bậc r trên $\mathbb{R}^d$ ứng với độ đo $d\mu = \omega dx$
$\mathbb{Z}_p$	tập các số nguyên trên trường $\mathbb{Q}_p$
$\mathbb{Z}_p^\star$	tập các số nguyên khác không trên trường $\mathbb{Q}_p$
$BMO(\mathbb{R}^d)$	không gian các hàm có dao động trung bình bị chặn trên $\mathbb{R}^d$
$BMO(\mathbb{Q}^d)$	không gian các hàm có dao động trung bình bị chặn trên $\mathbb{Q}^d$
χ	hàm đặc trưng của nhóm cộng tính của trường số thực hay trường số p-adic
$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega)$	không gian Herz thuần nhất có trọng trên $\mathbb{R}^d$
$M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)$	không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng trên $\mathbb{R}^d$
$Lip^\beta(\mathbb{R}^n)$	không gian Lipschitz trên $\mathbb{R}^d$
U_ψ	toán tử trung bình Hardy có trọng
$U_{\psi,s}$	toán tử Hardy-Cesàro có trọng
$U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$	Toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng
$U^p_{\psi,s}$	Toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng
$U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}$	Toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng
$U^{p,b}_{\psi,s}$	Giao hoán tử của toán tử Hardy-Cesàro có trọng
$U^{p,m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}$	Giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng
$U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}$	Giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng.

MỞ ĐẦU

1. TỔNG QUAN VỀ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU VÀ LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Một trong những vấn đề cốt lõi của giải tích điều hòa là nghiên cứu tính bị chặn của các toán tử T trên một số không gian hàm và một số không gian hàm suy rộng

$$||Tf||_Y \leq C||f||_X, \tag{1}$$

với C là hằng số nào đó, X, Y là hai không gian hàm hoặc hàm suy rộng với chuẩn tương ứng là $||\cdot||_X; ||\cdot||_Y$. Đây là câu hỏi xuất hiện một cách tự nhiên trong các nghiên cứu về giải tích, lý thuyết hàm, phương trình đạo hàm riêng. Chẳng hạn, ta xét thế vị Riesz J_α cho bởi công thức

$$J_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy. \tag{2}$$

Với $1 \leq p < \frac{d}{\alpha}$ và $q = \frac{dp}{d-\alpha p}$ thì J_α là toán tử bị chặn từ không gian $L^p(\mathbb{R}^d)$ vào không gian $L^q(\mathbb{R}^d)$. Một áp dụng trực tiếp của kết quả này là định lý nhúng Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, không gian $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ được nhúng liên tục vào trong không gian $L^q(\mathbb{R}^d)$ với $1 \leq p \leq q \leq p^*$, trong đó $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$.

Một trong những đối tượng nghiên cứu chính của luận án này là đánh giá (1) cho một lớp toán tử tích phân và giao hoán tử của chúng. Lớp toán tử này chứa đựng hoặc có mối liên hệ mật thiết với nhiều toán tử cổ điển quan trọng như toán tử Hardy, toán tử cực đại Calderón, toán tử Riemann-Lioville trên đường thẳng, trường hợp một phía của toán tử thế vị Riesz J_α như trong công thức (2), biến đổi Abel. Các ước lượng dạng (1) cho lớp toán tử T như thế thường được gọi là bất đẳng thức Hardy, và được biết đến như là một công cụ hữu ích trong nghiên cứu lý thuyết về các toán tử elliptic. Về lịch sử, bất đẳng thức tích phân Hardy và dạng rời rạc của nó ra đời khoảng năm 1920, liên quan đến tính liên tục của toán tử trung bình Hardy giữa các không gian L^p. Một trong những động lực chính dẫn tới các kết quả đó được xuất phát từ bất đẳng thức Hilbert (xem [16, 43]). Nhà toán học Hilbert, khi nghiên cứu nghiệm của một số phương trình tích phân, dẫn tới bài toán nghiên cứu tính hội tụ của chuỗi kép dạng

$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}$. Trong bài báo năm 1915 của mình Hardy đã chỉ ra sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}$ tương đương với sự hội tụ của hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n A_n}{n} \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2,$$

trong đó $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. Do đó, ta thu được dạng tích phân của kết quả này chính là nếu một hàm f thuộc $L^p(\mathbb{R}^+)$, với $1 < p < \infty$, thì Hf cũng thuộc $L^p(\mathbb{R}^+)$, trong đó

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt. \tag{3}$$

Năm 1920 G. Hardy [33] đã đưa ra bất đẳng thức tích phân sau đây

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)dx \tag{4}$$

với $1 < p < \infty$, f là hàm đo được không âm trên $(0,\infty)$, và hằng số $\frac{p}{p-1}$ là số nhỏ nhất thoả mãn bất đẳng thức (4).

Toán tử Hardy là một trường hợp riêng của lớp toán tử Hausdorff, xuất hiện trong các bài toán nghiên cứu tính khả tổng cho chuỗi số, chuỗi luỹ thừa với các công trình mang tính nền móng của Siskakis và của Liflyand-Móricz [45]. Trên trường thực, toán tử Hausdorff có dạng sau

$$\mathcal{H}_{\Phi,A}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(u) f(xA(u))du \tag{5}$$

với Φ là hàm đo được trên $\mathbb{R}^d$ và $A = A(u) = (a_{ij}(u))$ là ma trận cấp $d \times d'$ trong đó $a_{ij}(u)$ là hàm đo được theo biến u. Đặc biệt, khi $\Phi(u) = \chi_{[0,1]}(u)$, $A(u) = u$ thì $\mathcal{H}_{\Phi,A}$ trở thành toán tử Hardy cổ điển như đã đề cập ở trên.

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra, với các không gian X, Y nào và với các điều kiện nào của Φ, ma trận A thì (1) đúng với $T = \mathcal{H}_{\Phi,A}$. Hơn nữa, khi đó thì hằng số tốt nhất C trong (1) là bao nhiêu? Câu hỏi thứ nhất từ lâu đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới và có thể chỉ ra một số kết quả gần đây của K. Andersen, E. Liflyand, F. Möricz, D.S. Fan [3, 8, 45, 46]. Tuy nhiên các điều kiện cần về tính bị chặn được đưa ra chưa hẳn là điều kiện đủ và câu hỏi về hằng số tốt nhất trong mỗi trường hợp đó đều không dễ trả lời. Với câu hỏi thứ hai về việc xác định hằng số tốt nhất

trong các ước lượng dạng (1) cho các lớp toán tử trung bình có hai hướng: Thứ nhất là cho lớp toán tử trung bình trên hình cầu có dạng

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\Omega_d |x|^d} \int\limits_{|y|<|x|} f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{6}$$

Grafakos và Lacey chứng minh được rằng chuẩn L^p của $\mathcal{H}$ bằng $\dfrac{p}{p-1}$. Một số công trình nghiên cứu tiếp theo liên quan như [7, 8, 9, 19, 21, 22, 25, 26, 27, 49, 60].

Thứ hai, đối với lớp toán tử trung bình dọc theo cung tham số cho bởi dạng

$$U_\psi f(x) = \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt, \tag{7}$$

Đây là lớp toán tử có nhiều ứng dụng cao trong lý thuyết toán tử, phương trình vi phân đạo hàm riêng, bởi nó chứa nhiều toán tử cổ điển như toán tử Abel, Rieman-Liouville, toán tử Hardy, toán tử cực đại Calderón. Năm 2001, J. Xiao [58] công bố một kết quả mang tính đột phá: U_ψ bị chặn trên $L^q(\mathbb{R}^d)$ khi và chỉ khi $\int_0^1 t^{\frac{-d}{q}}\psi(t)dt$ hữu hạn. Hơn nữa,

$$||U_\psi||_{L^q(\mathbb{R}^d)\to L^q(\mathbb{R}^d)} = \int_0^1 t^{\frac{-d}{q}}\psi(t)dt. \tag{8}$$

Tương tự, U_ψ bị chặn trong BMO khi và chỉ khi $\int_0^1 \psi(t)dt$ hữu hạn và khi đó

$$||U_\psi||_{BMO(\mathbb{R}^d)\to BMO(\mathbb{R}^d)} = \int_0^1 \psi(t)dt. \tag{9}$$

Năm 2009, dựa trên phương pháp nghiên cứu cho các giao hoán tử của Calderón- Coifmann-Weiss, các tác giả Fu, Liu và Lu [23] chứng minh rằng $[M_b, U_\psi]$ bị chặn trong $L^q(\mathbb{R}^d)$ với mọi $b \in BMO(\mathbb{R}^d)$ khi và chỉ khi

$$\int\limits_0^1 t^{-d/q}\psi(t)\log\frac{2}{t}dt < \infty.$$

Ở đây M_b là toán tử nhân $M_b(f) = bf$. Kết quả này cho thấy rằng giao hoán tử của U_ψ là "kì dị hơn" so với U_ψ.

Hai kết quả nền tảng nói trên là động lực cho nhiều nghiên cứu sau này cho lớp toán tử U_ψ trong đó có thể kể ra một số công trình như [11, 12, 23, 24, 29, 34, 52, 62]. Đây cũng là hướng nghiên cứu chính mà tác giả lựa chọn

trong luận án này: nghiên cứu các ước lượng chuẩn cho toán tử đa tuyến tính có dạng sau

$$U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}\left(\vec{f}\right)(x) = \int_{[0,1]^n} \left(\prod_{k=1}^{n} f_k\left(s_k(t)x\right)\right)\psi(t)dt. \tag{10}$$

Chú ý rằng, động lực cho nghiên cứu các toán tử đa tuyến tính xuất hiện một cách tự nhiên từ các nghiên cứu về toán tử tích phân kì dị, chẳng hạn toán tử Riesz J_α. Kenig và Stein [37] chỉ ra được tính liên tục của toán tử đa tuyến tính Riesz tương ứng khi $1 < p_1, p_2 \leq \infty$ và $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{\beta}{d}$ chỉ với hạn chế $0 < \beta < d$ và $r < \infty$. Mặt khác, trong một trường hợp đặc biệt thì $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ có mối liên hệ mật thiết với dạng một phía của J_α, toán tử Riemann-Liouville. Vì vậy những kết quả về $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ sẽ kéo theo các kết quả tương ứng cho toán tử Riemann-Liouville. Điều này cũng đã được chỉ ra trong các công trình [29, 35].

Trường hợp $m = n = 1$, Chuong và Hung [11] tìm ra được điều kiện cần và đủ (với điều kiện thích hợp trên $s(t)$) của ψ để đảm bảo tính bị chặn của $U^{1,1}_{\psi,s}$ và các giao hoán tử của nó trong L^p và BMO với trọng thuần nhất. Chuẩn của toán tử tương ứng cũng được tìm ra. Một điều kiện cần của trọng để giao hoán tử $[M_b, U_{\psi,s}]$ bị chặn trong L^p cũng được đưa ra. Trong trường hợp không gian Herz, năm 2016, Chuong, Hung và Duong [12] đưa ra một điều kiện cần cho tính bị chặn của giao hoán tử khi b thuộc không gian Lipschitz. Hung và Ky [35] đưa ra các tiêu chuẩn để $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn từ $L^{p_1}_{\omega_1}(\mathbb{R}^d) \times \cdots \times L^{p_m}_{\omega_m}(\mathbb{R}^d)$ vào $L^p_\omega(\mathbb{R}^d)$ và bị chặn từ $\dot{B}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^d) \times \cdots \times \dot{B}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^d)$ vào $\dot{B}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^d)$. Hơn nữa chuẩn của toán tử trong từng trường hợp cũng được chỉ ra.

Tuy nhiên các tiêu chuẩn về tính bị chặn, chuẩn của $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ cùng giao hoán tử của nó trên các không gian loại Herz chưa được nghiên cứu trước đó. Các không gian loại Herz bên cạnh là những mở rộng tự nhiên của các không gian Lebesgue, còn có vai trò quan trọng trong phát triển lý thuyết hàm. Chẳng hạn, các hàm phân tử Taibleson-Weiss, đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết các không gian Hardy, thuộc không gian loại Herz (xem [5, 30]). Việc thiết lập các tính chất bị chặn và ước lượng chuẩn trên không gian loại Herz đòi hỏi phải thay đổi phương pháp tiếp cận so với các kết quả đã biết trên các không gian Lebesgue hay tâm Morrey.

Các phân tích tổng quan trên đây dẫn chúng tôi đến việc nghiên cứu câu hỏi về tính bị chặn và chuẩn của toán tử trong (10) từ tích các không gian

loại Herz và Morrey-Herz với trọng luỹ thừa. Những kết quả nghiên cứu đạt được, được chúng tôi công bố trong bài báo số 3., trong danh mục công trình liên quan đến luận án, và được trình bày trong chương 4 của Luận án này.

Một hướng nghiên cứu khác mà chúng tôi lựa chọn trong luận án này đó là nghiên cứu chuẩn của các toán tử trung bình p-adic. Từ những năm 1960 của thế kỉ trước, do nhu cầu phát triển của giải tích Fourier, người ta thấy cần xây dựng một số kết quả của giải tích cho những không gian tô-pô được trang bị độ đo Borel mà ở đó ta không có biến đổi Fourier hoặc các cấu trúc đạo hàm hỗ trợ. Vì lý do đó và sự cần thiết phải phát triển lý thuyết không gian hàm, Coifman, Rochberg và Weiss [14] đưa ra lớp không gian loại thuần nhất, trong đó cho phép ta có thể thiết lập được lý thuyết Calderón-Zygmund cho toán tử tích phân kì dị. Từ đây ta có thể xây dựng những không gian hàm quan trọng như không gian Hardy, tránh được việc phải đi tìm kiếm một hệ phương trình đạo hàm riêng mở rộng cho phương trình Cauchy-Riemann. Mặt khác, trong những nhóm compact địa phương, được chia ra hai loại: loại liên thông gồm có trường thực và phức. Loại còn lại gồm trường các số p-adic, các mở rộng bậc hữu hạn của trường số p-adic và trường chuỗi số Laurent trên trường hữu hạn. Lưu ý rằng loại thứ hai cũng là những không gian thuần nhất theo nghĩa của Coifmann-Rochberg-Weiss. Nhu cầu phát triển song song một lý thuyết về giải tích, không chỉ xuất phát từ nhu cầu của sự phát triển khoa học công nghệ, từ sự so sánh giữa lý thuyết trên hai loại trường thực và p-adic, mà còn xuất phát từ chính những lý thuyết trên trường thực và sau đó là ứng dụng ngược lại [39, 53, 54].

Toán tử giả vi phân p-adic D^α do Vladimirov [54] đưa ra có vai trò quan trọng trong nhiều ứng dụng khác nhau của giải tích p-adic, lý thuyết sóng nhỏ, phương trình giả vi phân p-adic: chẳng hạn có thể xây dựng một cơ sở trực chuẩn của $L^2(\mathbb{Q}_p)$ gồm các vector riêng của D^α. Nghịch đảo của toán D^α, trong tình huống thích hợp, có thể coi như là hiệu của hai toán tử Hardy p-adic có trọng, sai khác một hàm trọng luỹ thừa. Điều này cho thấy ý nghĩa của việc nghiên cứu các tính chất của toán tử Hardy.

Giả sử f là hàm đo được trên $\mathbb{Q}_p^d$. Khi đó, tích phân $S^p(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} f(tx)dt$ có thể coi là giá trị trung bình của f dọc theo cung tham số $t \mapsto tx$ với mỗi $x \in \mathbb{Q}_p^d$, do $|\mathbb{Z}_p^*| = 1$. Nếu xét ψ là hàm không âm, đo được

trên $\mathbb{Z}_p^*$ thì toán tử U_ψ^p xác định bởi

$$U_\psi^p f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f(tx)\psi(t)dt \tag{11}$$

có thể xem như dạng tương tự toán tử trung bình Hardy có trọng (7) trên trường thực. Năm 2006, Rim và Lee [51] chứng minh rằng U_ψ^p bị chặn trên $L^q(\mathbb{Q}_p^d)$, với $1 \leq q \leq \infty$, khi và chỉ khi

$$\mathcal{A}_\psi^p = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{-d/q}\psi(t)dt < \infty$$

và hơn nữa chuẩn toán tử U_ψ^p trong $L^q(\mathbb{Q}_p^d)$ đúng bằng $\mathcal{A}_\psi^p$. Từ đây suy ra ngay, khi $d = 1$, S^p không bị chặn trong $L^1(\mathbb{Q}_p)$ và điều này cũng tương tự đối với toán tử Hardy cổ điển trên trường thực. Rim và Lee cũng đồng thời chỉ ra U_ψ^p bị chặn trên $BMO(\mathbb{Q}_p^d)$ khi và chỉ khi $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} \psi(t)dt < \infty$ và chuẩn toán tử đúng bằng $\int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} \psi(t)dt$. Năm 2014, H.D. Hung [34] phát triển kết quả của Rim và Lee cho lớp toán tử p-adic Hardy-Cesàro $U_{\psi,s}^p$ trong các không gian với trọng luỹ thừa, trong đó

$$U_{\psi,s}^p f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f\left(s(t)x\right)\psi(t)dt. \tag{12}$$

Bên cạnh các kết quả về tính bị chặn, chuẩn của $U_{\psi,s}$ trên không gian p-adic Lebesgue và BMO có trọng, tác giả chỉ ra được một hệ quả về sự hội tụ của chuỗi kép trên trường thực thông qua đánh giá

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{j+\beta k}\, y_k\right)^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j^r\right)^{1/r}\left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k\right) \tag{13}$$

với $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ và $(y_k)_{k\geq 0}$ là hai dãy số không âm, β là số nguyên không âm tùy ý và với bất kỳ $1 \leq r < \infty$. Một số kết quả các cho tính bị chặn và chuẩn trên không gian Morrey của U_ψ^p được chứng minh bởi Wu và Fu [56]. Chuong và Duong [13] đưa ra các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của $U_{\psi,s}^p$ trong không gian Morrey-Herz p-adic cũng như đưa ra một điều kiện cần cho trọng ψ và hàm tham số $s(t)$ để $[U_{\psi,s}, M_b]$ bị chặn giữa các không gian Morrey-Herz. Song song với đó một số công trình như [28, 55, 57] nghiên cứu chuẩn của toán tử p-adic có dạng

$$\mathcal{H}^p f(x) = \frac{1}{|x|_p^d}\int\limits_{B(0,|x|_p)} f(t)dt. \tag{14}$$

Mặc dù có khá nhiều kết quả khác nhau về toán tử trung bình Hardy p-adic, tuy nhiên với trường hợp đa tuyến tính p-adic chưa có công trình nào đặt vấn đề nghiên cứu về chuẩn của các toán tử và giao hoán tử trên các không gian hàm p-adic tâm Morrey, không gian loại Herz. Bên cạnh đó các công trình như [28, 55, 56] mới chỉ dừng lại cho toán tử U_ψ^p và trường hợp không có trọng. Điều này dẫn tới hạn chế trong áp dụng, chẳng hạn trong tính chính quy về nghiệm của bài toán Cauchy trong phương trình giả vi phân p-adic.

Vì các lý do đó, chúng tôi đặt bài toán phát triển các kết quả của Wu và Fu [56] cho lớp toán tử $U_{\psi,s}^p$ với các không gian tương ứng có trọng luỹ thừa. Dựa trên công trình của Fu và cộng sự [29], Hung, Ky [35], Chuong và Duong [13] chúng tôi xây dựng lớp toán tử đa tuyến tính p-adic gắn với toán tử $U_{\psi,s}^p$. Chúng tôi nghiên cứu các tính chất bị chặn, các ước lượng chuẩn cho toán tử đa tuyến tính trong trường số p-adic.

2. MỤC ĐÍCH, ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

2.1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu tính bị chặn, chuẩn toán tử một số lớp toán tử tích phân loại Hardy và giao hoán tử trên trường thực và p-adic. Chúng tôi nghiên cứu các ước lượng chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz và không gian Morrey-Herz; đưa ra một điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử trong tích các không gian Morrey-Herz. Chúng tôi nghiên cứu chuẩn toán tử Hardy-Cesàro p-adic trong không gian Morrey, tâm Morrey, không gian tâm BMO. Chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử trong không gian Morrey tâm với biểu trưng thuộc lớp hàm tâm BMO. Các kết quả về toán tử được chúng tôi phát triển cho toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro p-adic. Chúng tôi cũng nghiên cứu các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử song tuyến tính Hardy-Cesàro p-adic trên tích các không gian tâm Morrey.

2.2. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của Luận án là lớp toán tử tích phân loại Hardy và giao hoán tử của chúng trên trường thực và p-adic. Lớp toán tử này

chứa nhiều lớp toán tử cổ điển như toán tử Hardy, toán tử Cesàro, toán tử Riemann-Liouville: Toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$, giao hoán tử của $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ theo nghĩa của Coifmann-Weiss trên tích các không gian Morrey-Herz với trọng luỹ thừa. Toán tử p-adic $U^{p}_{\psi,s}$ trên không gian Morrey, tâm Morrey và không gian BMO tâm. Chúng tôi phát triển nghiên cứu này cho toán tử đa tuyến tính p-adic $U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}$.

2.3. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của luận án được thể hiện thông qua các nội dung sau

- **Nội dung 1:** Ước lượng chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng và giao hoán tử trên các không gian p-adic kiểu Morrey có trọng.
  - Chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên không gian p-adic Morrey có trọng.
  - Chứng minh giao hoán tử $U^{p,b}_{\psi,s}$ bị chặn từ $\dot{B}^{q_1,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}^d_p\right)$ vào $\dot{B}^{q_2,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}^d_p\right)$ với $b \in CBMO^{q_2}_{\omega}\left(\mathbb{Q}^d_p\right)$.
- **Nội dung 2:** Ước lượng chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên các không gian hàm p-adic:
  - Ước lượng chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro đa tuyến tính trên tích các không gian Lebesgue có trọng.
  - Ước lượng chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro đa tuyến tính trên tích các không gian tâm Morrey có trọng.
  - Tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử p-adic Hardy-Cesàro đa tuyến tính trên tích của các không gian tâm Morrey.
- **Nội dung 3:** Ước lượng chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro và giao hoán tử trên tích các không gian Herz thuần nhất có trọng, Morrey-Herz có trọng thuần nhất.
  - Ước lượng chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz thuần nhất có trọng.
  - Ước lượng chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng.
  - Tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng.

3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Để nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hardy-Cesàro trên trường thực và p-adic chúng tôi vận dụng các phương pháp biến thực được Coifman-Rochberg-Weiss [14] xây dựng trên các không gian thuần nhất. Chúng tôi vận dụng các cách đánh giá đã được sử dụng trước đó để chứng minh tính liên tục của toán tử Hardy trên các không gian Morrey, tâm Morrey, các không gian loại Herz. Các đại lượng được đánh giá bằng cách chia nhỏ, như trong phương pháp biến thực, kết hợp với các bất đẳng thức tích phân Hölder và Minkowski. Chiều đảo lại, để thu được các ước lượng chuẩn toán tử, chúng tôi theo lược đồ mà Xiao [58] đã sử dụng và được phát triển trong các công trình tiếp theo: xây dựng những hàm thử trong các không gian hàm tương ứng để đưa ra các ước lượng dưới cho chuẩn của toán tử. Trên trường p-adic chúng tôi xây dựng phương pháp tương ứng kết hợp với cấu trúc tô-pô, độ đo tích phân đặc trưng cho không gian $\mathbb{Q}_p^d$.

- Đối với các nghiên cứu về giao hoán tử, phương pháp chủ đạo là dựa trên phương pháp kinh điển của Coifman-Rochberg-Weiss [14] trong đó mấu chốt là đưa về ước lượng dao động của các trung bình, kết hợp với một số kĩ thuật đặc trưng khi tiếp cận toán tử Hardy được xây dựng bởi Fu, Lu, Tang và các cộng sự khác [19, 22, 23, 25, 29, 52, 61] trên các không gian Lebesgue, tâm Morrey, không gian loại Herz.

4. CẤU TRÚC VÀ CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục công trình đã công bố và tài liệu tham khảo, luận án được chia làm bốn chương:

- **Chương 1:** *Kiến thức chuẩn bị.* Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các kiến thức cơ bản về giải tích p-adic, lí thuyết giải tích thực, các bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức Minkowski. Các không gian hàm kiểu Morrey, Lebueges, BMO, không gian tâm BMO có trọng, không gian kiểu Herz, không gian Morrey-Herz và các phiên bản p-adic của nó.

- **Chương 2:** *Toán tử p-adic Hardy-Cesàro và giao hoán tử trên các không gian kiểu Morrey .*

  Trong chương này, chúng tôi đánh giá tính bị chặn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên các không gian Morrey có trọng, không

gian tâm Morrey có trọng, không gian tâm BMO có trọng. Hơn nữa chúng tôi cũng tìm được chuẩn của toán tử tương ứng. Thêm vào đó chúng tôi tìm ra được điều kiện cần và đủ của hàm trọng $\psi(t)$ để giao hoán tử của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng bị chặn trên các không gian tâm Morrey với biểu trưng trong không gian tâm BMO.

- **Chương 3:** *Toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro và giao hoán tử trên một số không gian hàm p-adic.* Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính bị chặn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian Lebesgue và tích các không gian kiểu Morrey, đồng thời chuẩn của toán tử cũng được tìm ra. Hơn nữa chúng tôi tìm được điều kiện cần và đủ của hàm trọng để giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng bị chặn trên tích các không gian tâm Morrey với biểu trưng trong tích các không gian tâm BMO.

- **Chương 4:** *Toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro và giao hoán tử trên tích các không gian loại Herz.* Trong chương này, chúng tôi đánh giá tính bị chặn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian Morrey-Herz và tích các không gian Herz. Đồng thời chúng tôi đánh giá tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng với biểu trưng trong không gian các hàm Lipschitz.

5. Ý NGHĨA CỦA CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN

- Các kết quả thu được góp phần vào việc phát triển lý thuyết toán tử Hardy, giải tích điều hòa, phương trình đạo hàm riêng, các bất đẳng thức Hardy nói riêng và giải tích Fourier, giải tích p-adic nói chung.
- Các kết quả thu được là mở rộng và tổng quát hóa của một số kết quả liên quan trước đó.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

- Seminar "phương trình vi phân và tích phân" Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- Hội thảo cho Nghiên cứu sinh, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2017.

- Seminar "Toán tử giả vi phân, sóng nhỏ, giải tích điều hòa trên các trường thực, p-adic", Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
- Đại hội Toán học Toàn quốc lần thứ IX, Nha Trang, 08/2018.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Trường các số p-adic

Lý thuyết về trường các số p-adic, giải tích điều hoà trên trường các số p-adic cũng như ứng dụng có thể tìm được trong một số giáo trình chuyên khảo như [1, 38, 53, 54]. Ở đây chúng tôi chỉ tóm lược một số kết quả chính cần thiết trong luận án này.

1.1.1. Chuẩn p-adic

Một hàm $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ được gọi là một chuẩn của trường $\mathbb{Q}$ nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau:

i) $\varphi(x) \geq 0, \varphi(x) = 0$ khi $x = 0$.

ii) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), x, y \in \mathbb{Q}$.

iii) $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y), x, y \in \mathbb{Q}$.

Trong luận án này ta luôn kí hiệu p là số nguyên tố, với mỗi $x \in \mathbb{Q}$ ta đặt $|x|_p = 0$ nếu $x = 0$ hoặc $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$ nếu $x = p^{\gamma(x)}.\frac{m}{n}$, ở đó $\gamma(x), m, n$ là các số nguyên, m, n không chia hết cho p. Khi đó, $|\cdot|_p$ là một chuẩn trên $\mathbb{Q}$. Hơn nữa, điểm khác biệt là chuẩn $|\cdot|_p$ không những thỏa mãn ba tính chất (i), (ii), (iii) mà nó còn thỏa mãn tính chất mạnh hơn (iii) sau:

iv) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, dấu bằng xảy ra khi $|x|_p \neq |y|_p$.

Định lí 1.1. *(Định lý Ostrowski) Các chuẩn $|x|_\infty$ và $|x|_p$ với p là số nguyên tố vét hết tất cả các chuẩn không tương đương trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, ở đây $|x|_\infty = |x|$ là chuẩn trị tuyệt đối thông thường trên $\mathbb{Q}$.*

1.1.2. Số p-adic

Ta xét hàm $d_p(x, y) = |x - y|_p$ với $x, y \in \mathbb{Q}$. Dễ thấy d_p là một metric trên $\mathbb{Q}$. Bao đầy của $\mathbb{Q}$ theo d_p được kí hiệu là $\mathbb{Q}_p$. Với mỗi $x \in \mathbb{Q}_p, x \neq 0$ đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots), \tag{1.1}$$

trong đó $\gamma(x)$ là số nguyên, $x_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$ và $x_0 > 0$.

Trên $\mathbb{Q}_p$, ta xác định được hai phép toán cộng và nhân như sau: với $x, y \in \mathbb{Q}_p$ mà

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots),$$
$$y = p^{\gamma(y)}(y_0 + y_1 p + y_2 p^2 + \cdots),$$

ta đặt

$$x + y = p^{\gamma(x+y)}(c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots),$$

với $0 \leq c_i \leq p-1, c_0 > 0$. Ở đây $\gamma(x+y), c_0, c_i$ là các số nguyên được xác định bằng phương pháp hệ số bất định theo modulo p. Phép nhân hai số p-adic cũng được xác định tương tự. Khi đó $\mathbb{Q}_p$ cùng hai phép toán cộng và nhân trên lập thành một trường, được gọi là trường các số p-adic.

Ta kí hiệu $\mathbb{Z}_p$ là tập các số $x \in \mathbb{Q}_p$ sao cho $|x|_p \leq 1$ và $\mathbb{Z}_p^\star = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p \neq 0\}$.

Bổ đề 1.1. *[54, tr. 3-9] (a) $\mathbb{Q}_p$ là một trường với các phép toán trên.*

(b) Mỗi $x \in \mathbb{Q}_p, x \neq 0$, được biểu diễn dưới dạng (1.1) thì $|x|_p = p^{-\gamma}$.

(c) $\mathbb{Q}_p$ là không gian đủ ứng với metric d_p. Hơn thế, $\mathbb{Q}_p$ là một trường tô pô compact địa phương, hoàn toàn không liên thông.

1.1.3. Không gian $\mathbb{Q}_p^d$

Với mỗi d nguyên dương, ta định nghĩa $\mathbb{Q}_p^d$ là không gian vectơ d chiều trên trường $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p^d = \underbrace{\mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p}_{d}$ gồm các điểm $x = (x_1, \ldots, x_d)$ với $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{Q}_p$. Với mỗi $x \in \mathbb{Q}_p^d$ đặt

$$|x|_p = \max\{|x_1|_p, \ldots, |x_d|_p\}.$$

Dễ thấy rằng $|\cdot|_p$ thỏa mãn các tính chất sau:

(a) $|x|_p \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{Q}_p^d$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

(b) $|a \cdot x|_p = |a|_p \cdot |x|_p$ với với mọi $a \in \mathbb{Q}_p$ và $x \in \mathbb{Q}_p^d$.

(c) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ với $x, y \in \mathbb{Q}_p^d$.

(d) d_p là metric trên $\mathbb{Q}_p^d$, trong đó $d_p(x, y) = |x - y|_p$.

Kí hiệu

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^d : |x-a|_p \le p^\gamma\},$$
$$S_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^d : |x-a|_p = p^\gamma\},$$

và lần lượt được gọi là hình cầu và mặt cầu tâm a, bán kính p^γ. Ta viết B_γ, S_γ thay cho $B_\gamma(0), S_\gamma(0), \mathbb{Z}_p^d$ thay cho B_0.

Định lí 1.2. *[54, tr. 6-8] Hệ các hình cầu và mặt cầu trong $\mathbb{Q}_p^d$ thoả mãn các tính chất sau*

(a) $B_\gamma(a) = \bigcup_{\gamma'=-\infty}^{\gamma} S_{\gamma'}(a)$, $\bigcap_{\gamma\in\mathbb{Z}} B_\gamma(a) = \{a\}$ và $\bigcup_{\gamma\in\mathbb{Z}} B_\gamma(a) = \mathbb{Q}_p$. Đặc biệt $B_\gamma(a) \subset B_{\gamma'}(a)$ nếu $\gamma < \gamma'$.

(b) Nếu $b \in B_\gamma(a)$ thì $B_\gamma(b) = B_\gamma(a)$. Hai hình cầu bất kỳ hoặc rời nhau hoặc chứa nhau.

(c) Mọi tập mở trong $\mathbb{Q}_p^d$ có thể biểu diễn như là hợp của không quá đếm được các hình cầu đôi một rời nhau.

(d) Tập $K \subset \mathbb{Q}_p^d$ là compact trong $\mathbb{Q}_p^d$ khi và chỉ khi K đóng và bị chặn.

(e) $B_\gamma(a), S_\gamma(a)$ là các tập vừa đóng vừa mở và compact trong $\mathbb{Q}_p^d$.

1.2. Độ đo và tích phân trong $\mathbb{Q}_p^d$

Vì $\mathbb{Q}_p^d$ là một nhóm tô pô compact địa phương nên tồn tại một độ đo Haar dx trên $\mathbb{Q}_p^d$. dx là một độ đo Borel chính quy dương, bất biến với phép tịnh tiến. Độ đo dx được chuẩn hóa bởi

$$\int_{\mathbb{Z}_p^d} dx = 1.$$

Khi đó, dx được xác định duy nhất.

Giả sử A là tập mở khác rỗng trong $\mathbb{Q}_p^d$. Ký hiệu $L^r(A)$ (với $0 < r < \infty$) là tập tất cả các hàm đo được giá trị phức f xác định trên A sao cho

$$\|f\|_{L^r(A)} = \left(\int_A |f(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \text{ với } f \in L^r(A). \tag{1.2}$$

Trường hợp $r = \infty$ thì (1.2) được thay thế bằng

$$\|f\|_{L^\infty(A)} = \text{ess.sup}_{x\in A}|f(x)| < \infty.$$

Giả sử O là một tập mở của $\mathbb{Q}_p^d$. Ta ký hiệu $L_{loc}^r(O)$ là tập các hàm $f : O \to C$ thỏa mãn tính chất: Với mọi tập compact $K \subset O$ thì hàm $f \in L^r[K]$. Hàm f có tính chất như trên được gọi là khả tích địa phương bậc $r(r \geq 1)$. Để cho tiện, ta viết $L_{loc}^r = L_{loc}^r(\mathbb{Q}_p^d)$ là tập các hàm $f \in C(O)$ có supp $(f) \subset K$ trù mật trong không gian $L^r(O)$, ở đó K là tập compact chứa trong O.

Hàm $f \in L_{loc}^1$ được gọi là khả tích trên $\mathbb{Q}_p^d$ nếu tồn tại

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{B_N} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_{-\infty\leq\gamma\leq N} \int_{S_\gamma} f(x)dx.$$

Giới hạn trên, nếu tồn tại, được gọi là tích phân của f trên $\mathbb{Q}_p^d$ và ký hiệu là $\int\limits_{\mathbb{Q}_p^d} f(x)dx$. Do đó,

$$\int_{\mathbb{Q}_p^d} f(x)dx = \sum_{-\infty<\gamma<\infty} \int_{S_\gamma} f(x)dx. \tag{1.3}$$

Định lí 1.3. *[54, tr.49]*

Cho hàm $f : \mathbb{Q}_p^d \times \mathbb{Q}_p^m \to \mathbb{C}$ và giả sử tồn tại tích phân lặp

$$\int_{\mathbb{Q}_p^d} \left(\int_{\mathbb{Q}_p^m} |f(x;y)|dy \right) dx.$$

Khi đó, hàm f khả tích trên $\mathbb{Q}_p^{m+n}$ và

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p^d} \left(\int\limits_{\mathbb{Q}_p^m} |f(x,y)|dy \right) dx = \int\limits_{\mathbb{Q}_p^{m+n}} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathbb{Q}_p^m} \left(\int\limits_{\mathbb{Q}_p^d} |f(x,y)|dx \right) dy. \tag{1.4}$$

Ngược lại, nếu hàm $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^{m+n})$ thì cả hai tích phân lặp trên đều tồn tại và đẳng thức (1.4) đúng.

Định lí 1.4. *[54, tr.49] Giả sử $x = x(y)$ (tức là $x_i = x_i(y_1, y_2, ..., y_d), i = 1, 2, ..., d$) là ánh xạ đồng phôi từ tập mở compact $K_1 \subset \mathbb{Q}_p^d$ vào mở compact $K \in \mathbb{Q}_p^d$ và $x_i(y)$ là các hàm giải tích trong K_1 và*

$$\det \frac{\partial x(y)}{\partial y} = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\| \neq 0, \qquad y \in K_1.$$

Khi đó, với mọi $f \in L^1(K)$, ta có

$$\int_K f(x)dx = \int_{K_1} \left| \det \frac{\partial x(y)}{\partial y} \right| f(x(y))dy. \tag{1.5}$$

Ví dụ 1.1. *[54, tr. 40]* $\int\limits_{B_\gamma(a)} dx = p^{d\gamma}$ *và* $\int\limits_{S_\gamma(a)} dx = p^{d\gamma}(1 - \frac{1}{p^d})$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\int_{B_\gamma(a)} dx &= \int_{B_\gamma} dx \\ &= \int_{|y|\le 1} d(p^{-\gamma}y) \\ &= p^{d\gamma}\int_{B_0} dy \\ &= p^{d\gamma}.\end{aligned}$$

Từ đây,

$$\begin{aligned}\int_{S_\gamma(a)} dx &= \int_{B_\gamma(a)} dx - \int_{B_{\gamma-1}(a)} dx \\ &= p^{d\gamma}\left(1 - \frac{1}{p^d}\right).\end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.2. *[54, tr. 41]* $\int\limits_{B_0} \ln|x|dx = -\frac{\ln p}{p^d - 1}$.

Chứng minh. Từ công thức (1.3) ta có

$$\begin{aligned}\int_{B_0} \ln|x|dx &= \sum_{-\infty<\gamma\le 0}\int_{S_\gamma} \ln|x|dx \\ &= \sum_{-\infty<\gamma\le 0} \ln p^\gamma \int_{S_\gamma} dx \\ &= \ln p \sum_{-\infty<\gamma\le 0} \gamma p^{d\gamma}(1 - \frac{1}{p^d}) \\ &= -\left(1 - \frac{1}{p^d}\right)\ln p \sum_{\gamma=0}^{\infty} \gamma p^{-d\gamma} \\ &= -\frac{\ln p}{p^d - 1}.\end{aligned}$$

□

1.3. Các không gian hàm

Trong mục này, ta kí hiệu $(X, \mathcal{M}, \mu)$ là một không gian đo, trong đó $X = \mathbb{R}^d$ hoặc $X = \mathbb{Q}_p^d$, μ là một độ đo σ-hữu hạn trên σ-đại số $\mathcal{M}$ trong X.

Với số thực $\alpha > -d$, kí hiệu $\mathcal{W}_\alpha$ là họ tất cả các hàm ω dương h.k.n. trên $\mathbb{R}^d$ sao cho $0 < \int_{S_d} \omega(y) d\sigma(y) < \infty$ và thoả mãn $\omega(tx) = |t|^\alpha \omega(x)$ với mọi $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, trong đó S_d là mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^d$. Có thể thấy $\omega(x) = |x|^\alpha$ thuộc $\mathcal{W}_\alpha$.

Tương tự, $\mathcal{W}_\alpha^p$ là họ tất cả các hàm ω dương h.k.n trên $\mathbb{Q}_p^d$ khả tích địa phương và thoả mãn $\omega(tx) = |t|^\alpha \omega(x)$ với mọi $t \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{Q}_p^d$. Có thể thấy $\omega(x) = |x|_p^\alpha$ thuộc $\mathcal{W}_\alpha^p$.

Từ đây trở đi, các hàm trọng mà chúng tôi xem xét trong luận án luôn được hiểu thuộc $\mathcal{W}_\alpha$ khi xét $X = \mathbb{R}^d$ và $\mathcal{W}_\alpha^p$ khi xét $X = \mathbb{Q}_p^d$, ở đây $\alpha > -d$.

1.3.1. Không gian Lebesgue

Cho $0 < r < \infty$, ta ký hiệu $L^r(X)$ là tập hợp tất cả các hàm f đo được nhận giá trị phức trên X thỏa mãn

$$\|f\|_{L^r(X)} = \left(\int_X |f(x)|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} < \infty. \tag{1.6}$$

Ký hiệu $L^\infty(X)$ là tập hợp tất cả các hàm giá trị phức, đo được trên X sao cho tồn tại $B > 0$ để

$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \inf\{B > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > B\}) = 0\}. \tag{1.7}$$

Khi đó $L^r(X)$, với $0 < r \leq \infty$, là một không gian vectơ trên trường phức. Hai hàm trong không gian $L^r(X)$ được gọi là bằng nhau nếu chúng bằng nhau từng điểm hầu khắp nơi theo độ đo μ. Với $1 \leq r \leq \infty$, ta có $L^r(X)$ là một không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|_{L^r(X)}$.

Trường hợp $X = \mathbb{R}^d$ (hoặc $X = \mathbb{Q}_p^d$) và $d\mu(x) = \omega(x)dx$, trong đó ω là hàm đo được không âm, khả tích địa phương trên $\mathbb{R}^d$ (hoặc $\mathbb{Q}_p^d$), thì ta kí hiệu $L_\omega^r(\mathbb{R}^d)$ (hoặc $L_\omega^r(\mathbb{Q}_p^d)$) thay cho $L^r(X)$.

Hai hàm thử sau đây sẽ được thường xuyên sử dụng trong phần sau của luận án.

Ví dụ 1.3. *[58, tr.662] Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, đặt*

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x| \le 1 \\ |x|^{-\frac{d}{r}-\varepsilon} & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Khi đó, f_ε thuộc $L^r(\mathbb{R}^d)$ với mọi $0 < r < \infty$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f_\varepsilon(x)|^r dx \\ &= \int_{|x|>1} |x|^{-d-r\varepsilon} dx \\ &= \frac{n\pi^{\frac{d}{2}}}{\varepsilon r \Gamma(\frac{d}{2}+1)} < \infty. \end{aligned}$$

Vậy $f_\varepsilon \in L^r(\mathbb{R}^d)$. □

Ví dụ 1.4. *[34, tr.873] Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, đặt*

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x|_p < 1 \\ |x|_p^{-\frac{d+\alpha}{r}-\frac{1}{\varepsilon^2}} & \text{nếu } |x|_p \ge 1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Khi đó, f_ε là hàm thuộc không gian Lebesgue $L^r(\mathbb{Q}_p^d)$.

Định lí 1.5. *(Định lý hội tụ bị chặn) Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy các hàm trong $L^1(X)$ hội tụ điểm hầu khắp nơi theo độ đo μ đến hàm f trên X và giả sử tồn tại một hàm $g \in L^1(X)$ sao cho $|f_k(x)| \le g(x)$, hầu khắp nơi trên X với mọi k. Khi đó, $f \in L^1(X)$ và $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X f_k(x)d\mu$.*

Định lí 1.6. *(Bất đẳng thức Hölder) Cho $0 < p, p_1, \ldots, p_k \le \infty$ và $f_j \in L^{p_j}(X, \mu)$. Nếu*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k}$$

thì $f_1 \cdots f_k \in L^p(X, \mu)$ và

$$\|f_1 \cdots f_k\|_{L^p} \le \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Định lí 1.7. *(Bất đẳng thức Minkowski). Giả sử $(X, \mathcal{M}, \mu)$ và $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ là các không gian đo σ-hữu hạn và $f(x, y)$ là một hàm giá trị phức, $\mu \times \nu$-đo được trên $X \times Y$ sao cho với ν-hầu khắp $y \in Y, f(\cdot, y) \in L^q(X)$ với*

$1 \leq q \leq \infty$. *Khi đó,*

$$\left(\int\limits_X \left|\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \int\limits_Y \left(\int\limits_X |f(x,y)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} d\nu(y),$$

với giả thiết vế trái của bất đẳng thức trên là hữu hạn.

Định lí 1.8. *(Định lý Fubini). Giả sử $(X, \mathcal{M}, \mu)$ và $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ là các không gian đo σ- hữu hạn và $f(x,y)$ là một hàm đo được theo độ đo $\lambda = \mu \times \nu$. Nếu $f(x,y)$ không âm hoặc khả tích trên tập $A \times B \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ thì ta có*

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)d\lambda = \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)d\nu\right) d\mu = \int\limits_B \left(\int\limits_A f(x,y)d\mu\right) d\nu. \quad (1.10)$$

1.3.2. Không gian Herz

Trong khi nghiên cứu về đại số tích chập, Beurling [6] phải xem xét một số lớp hàm có tính chất đặc biệt, những lớp hàm đó sau này được biết đến như những không gian loại Herz và là những mở rộng tự nhiên của không gian Lebesgue. Việc mở rộng không gian Lebesgue sang Herz, Morrey, Morrey-Herz do nhu cầu của việc nghiên cứu toán lý thuyết như nghiên cứu tính chính quy của nghiệm hay nội tại từ việc phát triển lý thuyết hàm như lý thuyết không gian Hardy (xem [5, 30]). Các lớp không gian này rất phù hợp với các toán tử Hardy cổ điển. Vì vậy việc đặt vấn đề nghiên cứu tính bị chặn của toán tử $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ trên các không gian này là điều tự nhiên. Theo [50], chúng tôi xét không gian Morrey-Herz có trọng như sau: Cho $\chi_k = \chi_{C_k}; C_k = B_k \setminus B_{k-1}$ và $B_k = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 2^k\}$ với $k \in \mathbb{Z}$ và χ_E là các hàm đặc trưng của tập E.

Định nghĩa 1.1. Cho $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty$. Không gian kiểu Herz thuần nhất có trọng $\dot{K}^{\alpha,p}_q(\omega)$ được định nghĩa như sau:

$$\dot{K}^{\alpha,p}_q(\omega) = \{f \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \omega) : \|f\|_{\dot{K}^{\alpha,p}_q(\omega)} < \infty\}, \quad (1.11)$$

với

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,p}_q(\omega)} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p}||f\chi_k||^p_{q,\omega}\right\}^{1/p}. \quad (1.12)$$

Nhận xét 1.1. i) Nếu $\omega \equiv 1$ thì không gian $\dot{K}^{\alpha,p}_q(\omega)$ trở thành không gian Herz $\dot{K}^{\alpha,p}_q(\mathbb{R}^d)$ (xem [50]).

ii) Nếu $0 < p \leq \infty$ thì $\dot{K}_p^{0,p}(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$ như vậy ta có thể coi không gian Herz là một mở rộng của không gian Lebesgue.

iii) $\dot{K}_p^{\frac{\alpha}{p},p}(\mathbb{R}^d) = L^p(|x|^\alpha dx)(\mathbb{R}^d)$ với mọi $0 < p \leq \infty$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.5. *Cố định $0 < \varepsilon < 1$. Ta xét hàm f cho bởi công thức sau*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad |x| \leq 1 \\ |x|^{-\alpha - \frac{d+\gamma}{q} - \varepsilon} & \text{nếu} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Khi đó, f là hàm thuộc $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega)$.

Thật vậy, vì $f(x) = 0$ khi $|x| \leq 1$ nên ta có $||f\chi_k||_{L^q_\omega} = 0$, với $k = 0, -1, -2, ...$ Do đó với bất kỳ số nguyên dương k, ta tính được

$$\begin{aligned} ||f\chi_k||^q_{L^q_\omega} &= \int\limits_{2^{k-1} < |x| \leq 2^k} |x|^{(-\alpha - \frac{d+\gamma}{q} - \varepsilon)q} \omega(x) dx \\ &= 2^{-k(\alpha+\varepsilon)q} \frac{\omega(S_d)(2^{(\alpha+\varepsilon)q} - 1)}{q(\alpha+\varepsilon)}, \end{aligned}$$

ở đó $\omega_1(S_d) = \int\limits_{S_d} \omega_1(x)dx$. Vậy

$$||f\chi_k||_{L^q_\omega} = 2^{-k(\alpha+\varepsilon)} \left(\frac{\omega(S_d)(2^{(\alpha+\varepsilon)q} - 1)}{q(\alpha+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.13}$$

Từ đó ta thu được

$$||f||_{\dot{K}^{\alpha,p}_{q,\omega}} = 2^{-\varepsilon} \left(\frac{\omega(S_d)(2^{(\alpha+\varepsilon)q} - 1)}{q(\alpha+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{1 - 2^{-\varepsilon p}} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.14}$$

Do đó $f \in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega)$ và

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega)} = \frac{1}{(2^{\varepsilon p} - 1)^{1/p}} \cdot \left(\frac{2^{q(\alpha+\varepsilon)} - 1}{q(\alpha+\varepsilon)} \right)^{1/q} \cdot (\omega(S_d))^{1/q}.$$

1.3.3. Không gian Morrey-Herz

Định nghĩa 1.2. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\lambda \geq 0$ và ω là các hàm trọng không âm. Không gian kiểu Morrey-Herz thuần nhất có trọng $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ được định nghĩa như sau

$$M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega) = \{f \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \omega) : \|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} < \infty\}, \tag{1.15}$$

với

$$\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}||f\chi_k||^p_{q,\omega}\right\}^{1/p}. \tag{1.16}$$

Nhận xét 1.2. i) Nếu $\omega \equiv 1$ thì không gian $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ trở thành không gian $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$.

ii) Nếu $\lambda = 0$ thì không gian $M\dot{K}^{\alpha,0}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ trở thành không gian $\dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\mathbb{R}^d)$. Vì vậy, trường hợp đặc biệt của không gian Morrey-Herz là không gian Herz.

Ví dụ 1.6. *Hàm f cho bởi công thức sau*

$$f(x) = |x|^{-\alpha-\frac{d+\gamma}{q}+\lambda} \tag{1.17}$$

là một hàm thuộc không gian $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$.

Thật vậy, nếu $\alpha \neq \lambda$, ta có

$$\begin{aligned}||f_1\chi_k||_{L^{q_1}_{\omega_1}} &= \left(\int\limits_{2^{k-1}<|x|\le 2^k} |x|^{(-\alpha_1-\frac{d+\gamma_1}{q_1}+\lambda_1)q_1}\omega_1(x)dx\right)^{\frac{1}{q_1}}\\ &= 2^{-k(\alpha_1-\lambda_1)}\left(\frac{\omega_1(S_d)(2^{(\alpha_1-\lambda_1)q_1}-1)}{q_1(\alpha_1-\lambda_1)}\right)^{\frac{1}{q_1}}.\end{aligned}$$

Từ đó ta thu được

$$||f||_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} = 2^{\lambda}\left(\frac{\omega(S_d)(2^{(\alpha-\lambda)q}-1)}{q(\alpha-\lambda)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2^{\lambda p}-1}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.18}$$

Vậy hàm $f(x)$ xác định bởi công thức (1.17) thuộc không gian $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ và

$$\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} = \frac{2^{\lambda}}{(2^{\lambda p}-1)^{1/p}}\cdot\left(\frac{1-2^{-q(\lambda-\alpha)}}{q(\lambda-\alpha)}\right)^{1/q}\cdot(\omega(S_d))^{1/q}. \tag{1.19}$$

1.3.4. Không gian BMO

Không gian BMO lần đầu tiên được giới thiệu bởi F. John và L. Nirenberg năm 1961 [36]. Tiếp đó C. L. Fefferman 1971 [18] đã chứng minh được một kết quả quan trọng là không gian BMO là đối ngẫu của không gian Hardy H^1. Không gian những hàm dao động trung bình bị chặn có

trọng $BMO_\omega(\mathbb{R}^n)$ lần đầu tiên được giới thiệu bởi B. Muckenhoupt và R. Wheeden, xuất phát từ việc nghiên cứu sự tồn tại biến đổi Hilbert của hàm với dao động trung bình bị chặn (xem [47]). Không gian kiểu p-adic BMO đã được sử dụng trong khi nghiên cứu chuẩn của toán tử trung bình Hardy-Littlewood p-adic [1, 41, 51, 55, 57].

Định nghĩa 1.3. Cho $\omega(x)$ là một hàm trọng, tức là hàm đo được không âm, khả tích địa phương trên X. Không gian BMO có trọng $BMO(\omega)$ là tập hợp tất cả các hàm f có dao động trung bình bị chặn với hàm trọng ω, tức là

$$\|f\|_{BMO(\omega)} = \sup_B \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - f_{B,\omega}(x)|\omega(x)dx < \infty, \tag{1.20}$$

với sup được lấy qua tất cả các hình cầu d chiều, $\omega(B) = \int_B f(x)\omega(x)dx$, $f_{B,\omega} = \frac{1}{\omega(B)} \int_B f(x)\omega(x)$.

Bổ đề 1.2 ([34], Bổ đề 6.1)**.** *Nếu ω thuộc lớp hàm trọng $\mathcal{W}^p = \bigcup_{\alpha > -d} \mathcal{W}^p_\alpha$ thì $\log|x|_p \in BMO_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.*

1.3.5. Không gian Morrey trên trường p-adic

Không gian Morrey được đưa ra bởi C.B. Morrey khi nghiên cứu về hệ các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2, được ứng dụng trong nghiên cứu tính chính quy của nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng, đặc biệt với hệ elliptic phi tuyến, sử dụng để nghiên cứu tính bị chặn của một số toán tử cổ điển trong giải tích điều hòa như toán tử Hardy-Littlewood cực đại, toán tử tích phân kì dị Calderón-Zygmund (xem [42]).

Định nghĩa 1.4. Cho ω là hàm trọng xác định trên $\mathbb{Q}_p^d$, $1 \le q \le \infty$ và λ là các số thực thỏa mãn $-\frac{1}{q} \le \lambda < \infty$. Không gian p-adic Morrey có trọng $L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ là tập hợp tất cả các hàm $f \in L^q_{\omega,\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p^d)$ sao cho $\|f\|_{L_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} < \infty$ với

$$\|f\|_{L_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \sup_{\gamma\in\mathbb{Z}} \sup_{a\in\mathbb{Q}_p^d} \left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma(a)\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma(a)} |f(x)|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.21}$$

Nhận xét 1.3. i) $L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ là không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|_{L_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}$.

ii) $L_\omega^{q,-\frac{1}{q}}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) = L_\omega^q\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$, $L_\omega^{q,0}(\mathbb{Q}_p^d) = L_\omega^\infty(\mathbb{Q}_p^d)$, và $L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d) = \{0\}$ với $\lambda > 0$. Vì vậy, ta chỉ xét trường hợp $-\frac{1}{q} \le \lambda \le 0$.

Một ví dụ hữu ích của các hàm thuộc không gian p-adic Morrey có trọng được giới thiệu trong bổ đề sau.

Bổ đề 1.3. *Cho* $1 \leq q < \infty, -\frac{1}{q} < \lambda \leq 0$ *và* $\omega \in \mathcal{W}_\alpha^p$ *với* $\alpha > -d$. *Nếu* $f_0(x) = |x|_p^{(d+\alpha)\lambda}$ *thì* $f_0 \in L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ *và* $\|f_0\|_{L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} > 0$.

Chứng minh. Cho $a \in \mathbb{Q}_p^d$ và $\gamma \in \mathbb{Z}$, ta đặt

$$I_{a,\gamma} = \frac{1}{\omega\left(B_\gamma\left(a\right)\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma(a)} |f_0(x)|^q \omega(x) dx.$$

Ta chỉ cần chứng minh $I_{a,\gamma} \leq C$ với C là một hằng số dương không phụ thuộc vào a, γ. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $|a|_p = p^{\gamma'} > p^\gamma$. Với $x \in B_\gamma(a)$ thì $|x|_p = \max\{|a|_p, |x - a|_p\} = |a|_p$. Từ đó suy ra $B_\gamma(a) \subset S_{\gamma'}$. Vậy $I_{a,\gamma}$ bằng

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\left(a\right)\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma(a)} |x|_p^{(d+\alpha)\lambda q} \omega(x)\, dx &= \left(|a|_p^{-(d+\alpha)} \omega\left(B_\gamma\left(a\right)\right)\right)^{-\lambda q} \\
&\leq \left(|a|_p^{-(d+\alpha)} \omega\left(S_{\gamma'}\right)\right)^{-\lambda q} \\
&= (\omega(S_0))^{-\lambda q} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $|a|_p \leq p^\gamma$. Trong trường hợp này, $B_\gamma(a) = B_\gamma$. Khi đó

$$\begin{aligned}
I_{a,\gamma} &= \frac{1}{\omega\left(B_\gamma\left(a\right)\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} |x|_p^{(d+\alpha)\lambda q} \omega(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\omega\left(B_\gamma\left(a\right)\right)^{1+\lambda q}} \sum_{k \leq \gamma} \int_{S_k} p^{(d+\alpha)k\lambda q} \omega(x) dx \\
&= \frac{\omega(S_0)}{\omega(B_0)} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-(d+\alpha)(1+\lambda q)k} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ở đây đại lượng cuối cùng hữu hạn do $1 + \lambda q > 0$ và đại lượng đó không phụ thuộc vào a, γ. Vậy $I_{a,\gamma} \leq C$ với C là hằng số không phụ thuộc $(a, \gamma) \in \mathbb{Q}_p^d \times \mathbb{Z}$. Do đó f_0 thuộc $L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$. □

1.3.6. Không gian tâm Morrey trên trường p-adic

Trong [4], J. Alvarez và các cộng sự nghiên cứu mối quan hệ giữa không gian tâm BMO và không gian Morrey đồng thời họ cũng giới thiệu không gian λ-tâm dao động trung bình bị chặn và không gian tâm Morrey.

Định nghĩa 1.5. Cho λ, q là các số thực sao cho $1 \leq q < \infty$. Không gian p-adic tâm Morrey $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ là tập tất cả các hàm f xác định trên $\mathbb{Q}_p^d$ mà $f \in L^q_{loc}(\mathbb{Q}_p^d)$ sao cho $\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} < \infty$ với

$$\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \sup_{\gamma\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\omega(B_\gamma)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} |f(x)|^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.22}$$

Nhận xét 1.4. i) $L^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \hookrightarrow \dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right), \dot{B}^{q,-\frac{1}{q}}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) = L^q_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right).$

ii) Nếu $\lambda < -\frac{1}{q}$ thì $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) = \{0\}$. Do đó, ta chỉ xét không gian này trong trường hợp $\lambda \geq -\frac{1}{q}$.

iii) Nếu $1 \leq q_1 < q_2 < \infty$ thì $\dot{B}^{q_2,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \hookrightarrow \dot{B}^{q_1,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ với $\lambda \in \mathbb{R}$.

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu tính bị chặn, ước lượng chuẩn của giao hoán tử của các toán tử tích phân p-adic trong không gian p-adic $\lambda-$ tâm BMO. Lớp không gian này đã được sử dụng trong các nghiên cứu giao hoán tử của toán tử Hardy p-adic trước đây (xem [56]).

Định nghĩa 1.6. Cho $\lambda < \frac{1}{d}$ và $1 \leq q < \infty$ là hai số thực. Không gian p-adic $\lambda-$ tâm BMO, có kí hiệu là $CBMO^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ là tập tất cả các hàm $f \in L^q_{loc}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ sao cho

$$\|f\|_{CBMO^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \sup_{\gamma\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\omega(B_\gamma)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} |f(x) - f_{\gamma,\omega}|^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{1.23}$$

trong đó $f_{\gamma,\omega} = \dfrac{1}{\omega(B_\gamma)} \int\limits_{B_\gamma} |f(x)|\omega(x)dx$. Ta kí hiệu $CBMO^{q}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) := CBMO^{q,0}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.

Nhận xét 1.5. i) $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \hookrightarrow CBMO^{q}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.

ii) Khi $\lambda < -\frac{1}{q}$ thì $CBMO^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) = \{0\}$, do đó ta chỉ xét $\lambda \geq -\frac{1}{q}$.

iii) Nếu $1 \leq q_1 \leq q_2 < \infty$, thì ta có $CBMO^{q_2,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d) \hookrightarrow CBMO^{q_1,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$.

Bổ đề 1.4. *Giả sử rằng $\omega \in \mathcal{W}^p_\alpha$, $\alpha > -d$. Với bất kì $1 \leq q < \infty$, tồn tại một hằng số dương $C_{q,\omega}$ sao cho*

$$\|f\|_{CBMO^{q}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} \leq C_{q,\omega}\|f\|_{BMO_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}. \tag{1.24}$$

Do $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \hookrightarrow CBMO^{q}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ nên từ Bổ đề 1.3 ta suy ra

Bổ đề 1.5. *Cho $1 \leq q < \infty, 0 \leq \lambda < \frac{1}{d}$ và $\omega \in \mathcal{W}^p_\alpha$, với $\alpha > -d$. Nếu $f_0(x) = |x|_p^{(d+\alpha)\lambda}$ thì $f_0 \in CBMO^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.*

Chương 2

TOÁN TỬ P-ADIC HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN CÁC KHÔNG GIAN KIỂU MOREY

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro trên các không gian kiểu Morrey. Đầu tiên chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu bài toán. Để giải quyết bài toán, chúng tôi vận dụng ý tưởng của phương pháp biến thực đối với các toán tử tích phân Hardy, một số kết quả cơ bản về giải tích điều hoà trên trường p-adic như trong [2, 10, 24, 27, 28, 41, 51, 57]: kết hợp đánh giá thông qua các bất đẳng thức Minkowski, Hölder và việc xây dựng hàm thử để có bất đẳng thức ngược. Cuối cùng dựa theo phương pháp của Coifman-Rochberg-Weiss [14] chúng tôi đưa ra được một điều kiện cần và một điều kiện đủ của hàm trọng $\psi(t)$ để giao hoán tử của toán tử này bị chặn trên các không gian p-adic tâm Morrey với biểu trưng trong không gian p-adic tâm BMO có trọng.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo 1. trong danh mục công trình đã công bố.

2.1. Đặt vấn đề

Do độ đo Haar trên trường $\mathbb{Q}_p$ được chuẩn hoá bởi $\int\limits_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$ nên một cách tự nhiên toán tử S^p cho bởi công thức $S^p(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} f(tx)dt$ có thể coi là dạng p-adic của toán tử tích phân cổ điển Hardy. Trường hợp $\mathbb{Z}_p^*$ được thay bởi các hình cầu, do công thức đổi biến số p-adic và độ đo Haar bất biến dưới phép tịnh tiến, nên ta có thể đưa về S^p. Lấy ý tưởng từ công trình của Xiao [58], năm 2006, Rim và Lee đặt vấn đề nghiên cứu chuẩn của toán tử U_ψ^p, xem công thức (11), có thể coi là một dạng mở rộng của toán tử S^p với trọng. Rim và Lee [51] đưa ra được điều kiện cần và đủ cho hàm ψ để U_ψ^p bị chặn trên $L^q(\mathbb{Q}_p^d)$ và trên BMO. Năm 2014, các kết quả này phát triển cho toán tử Hardy-Cesàro bởi Hung [34], hơn nữa [34] đưa ra được một điều kiện cần cho tính bị chặn của giao hoán tử $U_{\psi,s}^{p,b}$. Mặt khác, năm 2010, Fu và Lu [24] đưa ra điều kiện cần và đủ cho hàm ψ cho tính bị chặn của toán

tử U_ψ cùng giao hoán tử trong không gian Morrey. Chuẩn của toán tử U_ψ cũng được chỉ ra. Năm 2012, Fu, Lu và Yuan [27], thu được các kết quả tương tự cho U_ψ và giao hoán tử trên các không gian tâm Morrey và tâm BMO. Sau đó năm 2017, Wu và Fu [56] chứng minh kết quả trong [27] cho trường các số p-adic tương ứng cho toán tử Hardy p-adic định nghĩa như sau

$$\mathcal{H}_\psi^p f(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} f(tx)\psi(x)dt.$$

Các tác giả thu được chuẩn của toán tử trên các không gian Morrey, không gian tâm Morrey, không gian tâm BMO như sau: với $1 < q < \infty, -\frac{1}{q} < \lambda \leq 0, \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{d\lambda}\psi(t)dt < \infty$ thì $\mathcal{H}_\psi^p$ bị chặn trên $L^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ và chuẩn của toán tử cũng được tìm ra

$$\|\mathcal{H}_\psi^p\|_{L^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)\to L^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{d\lambda}\psi(t)dt.$$

$$\|\mathcal{H}_\psi^p\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)\to \dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{d\lambda}\psi(t)dt.$$

Với $1 < q < \infty, 0 \leq \lambda < \frac{1}{q}$ thì toán tử $\mathcal{H}_\psi^p$ bị chặn trên$CBMO^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ và chuẩn bằng

$$\|\mathcal{H}_\psi^p\|_{CBMO^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)\to CBMO^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{d\lambda}\psi(t)dt.$$

Năm 2014, T.T. Dung [15] phát triển kết quả của Fu và Lu [24] cho toán tử $U_{\psi,s}$ trong không gian Morrey. Tuy nhiên chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro $U_{\psi,s}^p$ trong các không gian loại Morrey trên trường p-adic chưa được nghiên cứu trước đó, kể cả trong trường hợp không trọng. Ở đây toán tử p-adic Hardy-Cesàro xác định bởi

$$U_{\psi,s}^p f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f\left(s(t)x\right)\psi(t)dt,$$

với $s : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{Q}_p$, $\psi : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{R}_+$ và f là hàm đo được trên $\mathbb{Q}_p^d$. Bài toán mà chúng tôi nghiên cứu ở đây như sau: với điều kiện nào cho các hàm $s(t), \psi(t)$ thì $U_{\psi,s}^p$ là xác định và bị chặn trên $L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$, $B_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ và khi đó thì chuẩn của toán tử trên được xác định như thế nào? Bên cạnh đó chúng tôi cũng đi giải quyết bài toán về đặc trưng hàm trọng ψ, hàm tham số s

cho tính bị chặn của giao hoán tử $U^{p,b}_{\psi,s}$ trên không gian tâm Morrey p-adic. Như đã trình bày ở mục trước, trong phần Mở đầu, việc nghiên cứu lớp toán tử $U^p_{\psi,s}$ trên các không gian Morrey p-adic có những ứng dụng trong nghiên cứu các bất đẳng thức Hardy rời rạc trên trường thực. Phương pháp nghiên cứu mà chúng tôi sử dụng ở đây đã được sử dụng trong các nghiên cứu trước đó [24, 34, 56, 58]: để tìm được chuẩn của toán tử, bên cạnh kết hợp với các phương pháp biến thực trong giải tích điều hoà, chúng tôi vận dụng các ước lượng trực tiếp nhờ các bất đẳng thức tích phân Minkowski, Hölder và việc xây dựng hàm thử để thu được đánh giá là tốt nhất.

2.2. Chuẩn của toán tử $U^p_{\psi,s}$ trên các không gian kiểu Morrey

Để tiện cho việc trình bày, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và thuật ngữ sẽ dùng ở đây.

Định nghĩa 2.1. Cho $s : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{Q}_p$ và $\psi : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{R}_+$ là các hàm đo được và $\omega : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{R}_+$ là hàm khả tích địa phương. Toán tử p-adic Hardy-Cesàro với trọng $U^p_{\psi,s}$ được xác định như sau

$$U^p_{\psi,s} f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f\left(s(t)x\right)\psi(t)dt \tag{2.1}$$

trong đó f là hàm đo được trên $\mathbb{Q}_p^d$. Ta kí hiệu U^p_ψ thay cho $U^p_{\psi,s}$ khi $s(t) = t$.

Định nghĩa 2.2. Với $\alpha > -d$, ta kí hiệu $\mathcal{W}^p_\alpha$ là tập gồm tất cả các hàm không âm, khả tích địa phương ω trên $\mathbb{Q}_p^d$ sao cho $\omega(tx) = |t|_p^\alpha \omega(x)$ với mọi $x \in \mathbb{Q}_p^d$ và $t \in \mathbb{Q}_p^\star$ và $0 < \int_{S_0} \omega(x)dx < \infty$.

Trong toàn bộ chương này nếu không đề cập đến thì hàm $\omega \in \mathcal{W}^p_\alpha$

Ví dụ 2.1. *Với mỗi $\alpha > -d$ thì ω_0 thuộc $\mathcal{W}^p_\alpha$, ở đây $\omega_0(x) = |x|_p^\alpha$.*

Các kết quả chính của mục này gồm các Định lý 2.1, Định lý 2.2.

Định lí 2.1. *Cho $1 \le q < \infty, -\frac{1}{q} < \lambda \le 0$ là các số thực. Cho ψ là một hàm không âm, đo được trên $\mathbb{Z}_p^\star$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương*

(1) $\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\psi(t)dt$ hữu hạn.

(2) $U^p_{\psi,s}$ bị chặn trên $L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$.

(3) $U^p_{\psi,s}$ bị chặn trên $\dot{B}^{q,\lambda}_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.

Hơn nữa khi đó,

$$\|U^p_{\psi,s}\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)\to L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} = \|U^p_{\psi,s}\|_{\dot{B}^{q,\lambda}_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)\to \dot{B}^{q,\lambda}_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \mathcal{A}. \tag{2.2}$$

Chứng minh. Giả sử rằng $\mathcal{A}$ hữu hạn và $f \in L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$. Theo bất đẳng thức Minkowski và phép đổi biến (1.5), ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\left(a\right)\right)^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma(a)}|U^p_{\psi,s}f(x)|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
=&\left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\left(a\right)\right)^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma(a)}|\int_{\mathbb{Z}_p^\star}f(s(t)x)\psi(t)dt|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq&\int_{\mathbb{Z}_p^\star}\left(\frac{1}{\omega\left(s(t)B_\gamma\left(a\right)\right)^{1+\lambda q}}\int_{s(t)B_\gamma(a)}|f(y)|^q\omega(y)dy\right)^{\frac{1}{q}}|s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\psi(t)dt\\
\leq&\|f\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^n)}.\int_{\mathbb{Z}_p^\star}|s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\psi(t)dt\\
<&\infty.
\end{aligned}$$

Vậy nếu $\mathcal{A}$ hữu hạn thì $U^p_{\psi,s}$ là bị chặn trên $L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$ và

$$\|U^p_{\psi,s}\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)\to L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} \leq \mathcal{A}. \tag{2.3}$$

Mặt khác giả sử rằng $U^p_{\psi,s}$ là bị chặn trên $L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$. Lấy $f_0(x) = |x|_p^{(d+\alpha)\lambda}$, theo Bổ đề 1.3, $f_0 \in L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$ và $\|f_0\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} > 0$. Mặt khác $U^p_{\psi,s}f_0(x) = f_0(x)\cdot\mathcal{A}$. Do đó,

$$\begin{aligned}
\|U^p_{\psi,s}f_0\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} &= \mathcal{A}\cdot\|f_0\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)}.\\
&\leq \|U^p_{\psi,s}\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)\to L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)}.\|f_0\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\mathcal{A} \leq \|U^p_{\psi,s}\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)\to L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)}. \tag{2.4}$$

Từ (2.3) và (2.4), ta nhận được

$$\mathcal{A} = \|U^p_{\psi,s}\|_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)\to L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)}.$$

Từ trên, với $a = 0$, ta thu được

$$\left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}\left|U^p_{\psi,s}f(x)\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \mathcal{A}\cdot\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}$$

với mọi $f \in \dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Điều này suy ra rằng $U^p_{\psi,s}$ bị chặn trên $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ nếu $\mathcal{A}$ hữu hạn. Mặt khác, do $f_0 \in L^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ nên $f_0 \in \dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$, thành thử bằng lập luận tương tự trên, ta suy ra $\mathcal{A}$ hữu hạn và

$$\left\|U^p_{\psi,s}\right\|_{\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)\to\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \mathcal{A}.$$

□

Nhận xét 2.1. Khi $s(t) = t$ và $\omega \equiv 1$ ta thu được kết quả của Định lí 2.1 và 2.3 trong [56]. Lưu ý rằng các Định lí 2.1 và 2.3 trong [56], các tác giả chỉ đưa ra kết luận với $1 < q$, trong khi đó Định lí 2.1 chỉ ra tiêu chuẩn bị chặn cả trong trường hợp $q = 1$.

Như ta đã biết, toán tử S^p, cho bởi công thức $S^p(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} f(tx)dt$, không bị chặn trong $L^1(\mathbb{Q}_p)$ (xem [51]). Do đó một câu hỏi tự nhiên đặt ra từ đây và từ Nhận xét trên, S^p có bị chặn trong $L^{1,\lambda}(\mathbb{Q}_p)$ hoặc $B^{1,\lambda}(\mathbb{Q}_p)$, với $-1 < \lambda \leq 0$ hay không? Vì

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{d\lambda} dt = \left(1 - \frac{1}{p^d}\right) \sum_{\gamma \leq 0} p^{\gamma d(1+\lambda)} = \infty$$

nên theo Định lí 2.1 ta thu được

Nhận xét 2.2. Toán tử S^p không bị chặn trong $L^{1,\lambda}(\mathbb{Q}_p)$ và trong $B^{1,\lambda}(\mathbb{Q}_p)$, với $-1 < \lambda \leq 0$.

Nhận xét 2.3. Trường hợp $\lambda = -\frac{1}{q}$, không gian $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ và $L^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ trở thành $L^q_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ mặc dù chứng minh được sử dụng trong Định lí 2.1 không còn đúng nữa, tuy nhiên theo kết quả của Định lí 3.1 trong [34], thì kết luận của Định lí vẫn đúng nhưng phải bổ sung thêm một điều kiện kĩ thuật $|s(t)|_p \geq |t|_p^{\beta}$ với $t \in \mathbb{Z}_p^*$ (có thể xem Định lí 3.1 trong Chương 3).

Bây giờ chúng tôi sẽ đưa ra một áp dụng minh hoạ cho kết quả trên vào nghiên cứu nghiệm của các phương trình giả vi phân p-adic. Toán tử giả vi phân p-adic Vladimirov D^{α}, có vai trò trong nhiều lĩnh vực khác nhau của giải tích p-adic [39, 54]. Hơn nữa, hệ các vectơ riêng của D^{α} là một cơ sở trực giao trong $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Xét bài toán Cauchy sau

$$D^{\alpha}u + a(|x|_p)u = f(|x|_p), \quad x \in \mathbb{Q}_p,$$

$$u(0) = 0,$$

trong đó a, f là các hàm liên tục, hàm cần tìm $u = u(|x|)$ là hàm bán kính. Để nghiên cứu tính giải được của bài toán trên, năm 2014, A. Kochubei [40] xét nghiệm u có dạng $u = R^p_\alpha(v)$, trong đó R^p_α có dạng

$$R^p_\alpha f(x) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p \le |x|_p} \left(|x-y|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}\right) f(y)dy$$

với f là hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{Q}_p$. Toán tử R^p_α là nghịch đảo phải của D^α trên không gian các hàm hằng địa phương có vai trò như toán tử tích phân hàm Riemann-Lioville trên trường thực. Xét $\psi_0(t) = \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}}|1-t|_p^{\alpha-1}$ và $\psi_1(t) = \psi_0(1-t)$ thì

$$|x|_p^{-\alpha} R^p_\alpha f(x) = U^p_{\psi_0} f(x) - U^p_{\psi_1} f(x).$$

Để cho ngắn gọn, ta chỉ xét ở đây trường hợp $0 < \alpha < 1$. Trường hợp $\alpha > 1$, được xem xét tương tự. Khi đó,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{\lambda+\alpha} dt \\
&= \left(1-\frac{1}{p}\right) \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \sum_{\gamma \ge 0} p^{-\gamma(\lambda+\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\lambda+\alpha+1 > 0$ khi $\lambda \ge -\frac{1}{q}$ với $q \ge 1$ nên $\mathcal{A}_1$ là hữu hạn. Tương tự,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{\lambda} |1-t|_p^{\alpha} dt \\
&\le \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} |t|_p^{\lambda} dt \\
&= \left(1-\frac{1}{p}\right) \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \sum_{\gamma \ge 0} p^{-\gamma(\lambda+1)} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

khi $\lambda > -1$. Do đó, theo Định lí 2.1 ta thu được

Hệ quả 2.1. *Giả sử $0 < \alpha < 1$, $1 \le q < \infty$ và $-\frac{1}{q} < \lambda < 0$. Khi đó, R^p_α là một toán tử bị chặn từ $L^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p)$ vào $L^{q,\lambda}(|x|_p^{-\alpha q}dx, \mathbb{Q}_p)$.*

Định lí 2.2. *Nếu q, λ là các số thực thỏa mãn $1 < q < \infty, 0 \le \lambda < \frac{1}{d}$ thì $U^p_{\psi,s}$ bị chặn trên $CBMO^{q,\lambda}_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ khi và chỉ khi $\mathcal{A}$ là hữu hạn. Hơn nữa,*

$$\|U^p_{\psi,s}\|_{CBMO^{q,\lambda}_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \to CBMO^{q,\lambda}_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \mathcal{A}. \tag{2.5}$$

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{A}$ hữu hạn và $f \in CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Cho γ là số nguyên tuỳ ý, theo định lý Fubini và công thức đổi biến, ta có

$$\begin{aligned}\left(U_{\psi,s}^p f\right)_{\gamma,\omega} &= \frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)} \int_{B_\gamma} \left(\int_{\mathbb{Z}_p^\star} f(s(t)x)\psi(t)dt \right) \omega(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f_{s(t)B_\gamma,\omega}\psi(t)dt.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta được

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} \left| U_{\psi,s}^p f(x) - \left(U_{\psi,s}^p f\right)_{\gamma,\omega} \right|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} \left| \int_{\mathbb{Z}_p^\star} \left(f(s(t)x) - f_{s(t)B_\gamma,\omega} \right) \psi(t)dt \right|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \int_{\mathbb{Z}_p^\star} \left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)^{1+\lambda q}} \int_{s(t)B_\gamma} \left| f(y) - f_{s(t)B_\gamma,\omega} \right|^q \omega(y)dy \right)^{\frac{1}{q}} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda} \psi(t)dt \\ &\leq \mathcal{A} \left\| f \right\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Vậy $U_{\psi,s}^p$ bị chặn trên $CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ và

$$\left\| U_{\psi,s}^p \right\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \to CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} \leq \mathcal{A}. \tag{2.6}$$

Ngược lại, giả sử $U_{\psi,s}^p$ xác định như là một toán tử bị chặn trên $CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Xét hàm $f_0(x) = |x|_p^{(d+\alpha)\lambda}$. Theo Bổ đề 1.5, $f_0 \in CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Mặt khác,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} \left| U_{\psi,s}^p f_0(x) - \left(U_{\psi,s}^p f_0\right)_{B_\gamma,\omega} \right|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} \left| f_0(x) - \left(f_0\right)_{B_\gamma,\omega} \right|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Do đó $\left\| U_{\psi,s}^p f_0 \right\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} = \left\| f_0 \right\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} \mathcal{A}$. Từ đó suy ra

$$\left\| U_{\psi,s}^p \right\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \to CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} \geq \mathcal{A}. \tag{2.7}$$

Vậy $\mathcal{A}$ hữu hạn. Kết hợp (2.6) và (2.7), ta thu được kết quả (2.5). □

Nhận xét 2.4. Khi $s(t) = t$ và hàm trọng $\omega \equiv 1$, ta thu được các Định lý 2.1, 2.3, 2.5 của Wu và Fu [56].

2.3. Giao hoán tử của toán tử p-adic Hardy-Cesàro

2.3.1. Các giao hoán tử và bổ đề bổ trợ

Giao hoán tử của toán tử $U^p_{\psi,s}$ được xác định như sau

Định nghĩa 2.3. Cho $\psi : \mathbb{Z}^\star \to [0,\infty), s : \mathbb{Z}^\star \to \mathbb{Q}_p, b$ là hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{Q}_p^d$, $f : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{C}$ là hàm đo được. Giao hoán tử của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng $U^{p,b}_{\psi,s}$ được định nghĩa như sau:

$$U^{p,b}_{\psi,s} f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\star} f(s(t)x)(b(x) - b(s(t)x))\psi(t)dt. \tag{2.8}$$

Bài toán chúng tôi quan tâm ở đây là nghiên cứu tính bị chặn của $U^{p,b}_{\psi,s}$ trong các không gian hàm kiểu Morrey. Với hàm biểu trưng b thuộc $BMO_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$, trong [34], tác giả đã đưa điều kiện cần đối với hàm ψ để $U^{p,b}_{\psi,s}$ bị chặn trên không gian Lebesgue có trọng. Q.Y. Wu, Z.W. Fu [56] đặt vấn đề nghiên cứu bài toán đặc trưng hàm trọng ψ để $U^{p,b}_{\psi}$ bị chặn trong các không gian kiểu Morrey p-adic. Trong [55], tác giả đặt vấn đề nghiên cứu tương tự cho toán tử Hardy dạng tích phân hàm p-adic. Mục đích của phần này của chúng tôi là nghiên cứu tính bị chặn của giao hoán tử $U^{p,b}_{\psi,s}$ trong các không gian tâm Morrey p-adic với trọng luỹ thừa.

Một trong những kĩ thuật chìa khoá là kết quả sau đây.

Bổ đề 2.1. *Giả sử rằng b là hàm thuộc $CBMO^{q,\lambda}_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ và γ, γ' là các số nguyên. Giả sử $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda \le \frac{1}{d}$, $1 < q < \infty$ và $\omega \in \mathcal{W}_\alpha$ với $\alpha > -d$. Khi đó ta có*

$$\left|b_{B_\gamma,\omega} - b_{B_{\gamma'},\omega}\right| \le c_\lambda p^{d+\alpha} |\gamma' - \gamma| \, \|b\|_{CBMO^{q,\lambda}_\omega} \max\{\omega\left(B_\gamma\right)^\lambda, \omega\left(B_{\gamma'}\right)^\lambda\},$$

ở đó

$$c_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad \lambda = 0 \\ (d+\alpha)\ln p \cdot \frac{p^{(d+\alpha)\lambda}}{\left|p^{(d+\alpha)\lambda}-1\right|} \cdot |\lambda| & \text{nếu} \quad \lambda \ne 0. \end{cases}$$

Chứng minh Ta chỉ cần chứng minh Bổ đề cho trường hợp $\gamma' > \gamma$. Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} \left|b_{B_{\gamma+1},\omega} - b_{B_\gamma,\omega}\right| &\le \frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)} \int_{B_\gamma} \left|b(x) - b_{B_{\gamma+1},\omega}\right| \omega(x)dx \\ &\le \frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)} \int_{B_{\gamma+1}} \left|b(x) - b_{B_{\gamma+1},\omega}\right| \omega(x)dx \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\omega\left(B_{\gamma+1}\right)^{\frac{q-1}{q}}}{\omega\left(B_{\gamma}\right)}\left(\int_{B_{\gamma+1}}\left|b(x)-b_{B_{\gamma+1},\omega}\right|^{q}\omega(x)dx\right)^{1/q}$$
$$= p^{d+\alpha}\cdot\omega\left(B_{\gamma+1}\right)^{\lambda}\cdot\|b\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}.$$

Do đó,

$$\left|b_{B_{\gamma+1},\omega}-b_{B_{\gamma},\omega}\right|\leq p^{d+\alpha}\cdot\omega\left(B_{\gamma+1}\right)^{\lambda}\cdot\|b\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}. \tag{2.9}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\left|b_{B_{\gamma'},\omega}-b_{B_{\gamma},\omega}\right| &\leq \sum_{k=\gamma}^{\gamma'-1}\left|b_{B_{k+1},\omega}-b_{B_k,\omega}\right|\\ &\leq p^{d+\alpha}\|b\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}\cdot\sum_{k=\gamma}^{\gamma'-1}\omega\left(B_{k+1}\right)^{\lambda}\\ &= p^{d+\alpha}\|b\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}\cdot\omega\left(B_{\gamma'}\right)^{\lambda}\sum_{j=0}^{\gamma'-\gamma-1}p^{-(d+\alpha)\lambda j}.\end{aligned}$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh Bổ đề trong trường hợp $\lambda\neq 0$.

Trường hợp 1: $\lambda>0$. Sử dụng bất đẳng thức $1-e^{-x}\leq x$ với $x=(d+\alpha)\lambda\left(\gamma'-\gamma\right)\ln p$, ta thu được

$$\begin{aligned}\left|b_{B_{\gamma'},\omega}-b_{B_{\gamma},\omega}\right| &\leq p^{d+\alpha}\frac{p^{(d+\alpha)\lambda}}{p^{(d+\alpha)\lambda}-1}(d+\alpha)\lambda\left(\gamma'-\gamma\right)\ln p\|b\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}}\omega\left(B_{\gamma'}\right)^{\lambda}\\ &= p^{d+\alpha}\left|\gamma'-\gamma\right|\max\{\omega\left(B_{\gamma}\right)^{\lambda},\omega\left(B_{\gamma'}\right)^{\lambda}\}\cdot c_{\lambda}\cdot\|b\|_{CBMO_{\omega}^{q,\lambda}}.\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $\lambda<0$ được chứng minh tương tự. Vậy ta được điều phải chứng minh.

2.3.2. Các kết quả chính

Kết quả đầu tiên là định lí sau đây.

Định lí 2.3. *Cho q,q_1,q_2 là các số thực sao cho $1<q<q_1<\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$ và $-\frac{1}{q_1}<\lambda<0$. Cho $s:\mathbb{Z}_p^{\star}\to\mathbb{Q}_p$ là hàm đo được sao cho $s(t)\neq 0$ hầu khắp nơi với $t\in\mathbb{Z}_p^{\star}$, $\omega\in\mathcal{W}_{\alpha}^{p}$. Giả sử rằng $b\in CBMO_{\omega}^{q_2}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Nếu cả $\mathcal{A},\mathcal{B}$ hữu hạn thì giao hoán tử $U_{\psi,s}^{p,b}$ xác định một toán tử bị chặn từ $\dot{B}_{\omega}^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^n\right)$ vào $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Ngược lại, nếu $U_{\psi,s}^{p,b}$ bị chặn từ $\dot{B}_{\omega}^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ vào*

$\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ thì $\mathcal{B}_\star$ hữu hạn.Hơn nữa,

$$\left(\frac{\|f_0\|_{\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}}{\|f_0\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}}\cdot\mathcal{B}_\star\right)\cdot\|b\|_{CBMO^{q_2,\lambda_2}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)}\leq\|U^{p,b}_{\psi,s}\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)\to\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}$$
$$\leq\left(2\mathcal{A}+p^{d+\alpha}\mathcal{B}\right)\cdot\|b\|_{CBMO^{q_2}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}.$$

Ở đây chúng tôi kí hiệu

$$\mathcal{B}=\int_{\mathbb{Z}_p^\star}|s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\cdot\left|\log_p|s(t)|_p\right|\cdot\psi(t)dt \tag{2.10}$$

và

$$\mathcal{B}_\star=\left|\int_{\mathbb{Z}_p^\star}|s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\cdot\log_p|s(t)|_p\cdot\psi(t)dt\right|. \tag{2.11}$$

Vì $\log_p|s(t)|_p$ là số nguyên với bất kỳ $t\in\mathbb{Z}_p^\star$. Do đó $|s(t)|_p\neq 1$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{Z}_p^\star$ thì $\mathcal{B}\geq\mathcal{A}$. Mặt khác nếu $|s(t)|_p\geq 1$ hầu khắp nơi với $t\in\mathbb{Z}_p^\star$ hoặc $|s(t)|_p\leq 1$ hầu khắp nơi với $t\in\mathbb{Z}_p^\star$ thì $\mathcal{B}_\star=\mathcal{B}$. Điều đó suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 2.2. *Cho q,q_1,q_2 là các số thực sao cho $1<q<q_1<\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$ và $-\frac{1}{q_1}<\lambda<0$. Cho $s:\mathbb{Z}_p^\star\to\mathbb{Q}_p$ là hàm đo được thỏa mãn $|s(t)|_p>1$ hầu khắp nơi $t\in\mathbb{Z}_p^\star$ hoặc $|s(t)|_p<1$ hầu khắp nơi với $t\in\mathbb{Z}_p^\star$. Nếu $b\in CBMO^{q_2}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ thì giao hoán tử $U^{p,b}_{\psi,s}$ xác định một toán tử bị chặn từ $\dot{B}^{q_1,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ vào $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ khi và chỉ khi $\mathcal{B}$ hữu hạn.*

Nhận xét 2.5. Như ta đã biết, giao hoán tử của toán tử Hardy nói chung "kì dị hơn" so với toán tử Hardy tương ứng. Điều này cũng không ngoại lệ trong trường hợp không gian tâm Morrey. Thực tế, khi $|s(t)|_p<1$ với hầu khắp nơi $t\in\mathbb{Z}_p^*$ thì $\mathcal{B}$ hữu hạn kéo theo $\mathcal{A}$ hữu hạn. Mặt khác, ví dụ sau đây chỉ ra $\mathcal{A}$ hữu hạn nói chung không thể suy ra $\mathcal{B}$ hữu hạn.

Thật vậy, chọn $s(t)=pt$, $\psi(t)=\frac{1}{|pt|_p^{1+(d+\alpha)\lambda}\left(\log_p|pt|_p\right)^2}$, thì ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\int_{\mathbb{Z}_p^\star}\frac{1}{|pt|_p\left(\log_p|pt|_p\right)^2}dt\\&=\sum_{k\leq 0}\int_{S_k}\frac{dt}{p^{k-1}\left(k-1\right)^2}\\&=\sum_{k\leq 0}\frac{1}{\left(k-1\right)^2}\cdot(p-1)\end{aligned}$$

$$< \infty.$$

Trong khi đó

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \int_{\mathbb{Z}_p^\star} \frac{1}{|pt|_p \left|\log_p |pt|_p\right|} dt \\
&= \sum_{k\le 0} \int_{S_k} \frac{dt}{p^{k-1}\,|k-1|} \\
&= \sum_{k\le 0} \frac{1}{|k-1|} \cdot (p-1) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Định lí 2.4. *Cho* $1 < q < q_1 < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, -\frac{1}{q} < \lambda < 0, -\frac{1}{q_1} < \lambda_1 < 0, 0 < \lambda_2 < \frac{1}{d}$ *và* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. *Cho* $s : \mathbb{Z}_p^\star \to \mathbb{Q}_p$ *là hàm đo được sao cho* $s(t) \neq 0$ *hầu khắp nơi,* $\omega \in \mathcal{W}_\alpha^p$. *Nếu* $\mathcal{C}$ *hữu hạn thì với bất kỳ* $b \in CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)$, *giao hoán tử tương ứng* $U_{\psi,s}^{p,b}$ *bị chặn từ* $\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)$ *vào* $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ *và ta có*

$$\|U_{\psi,s}^{p,b}\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d)\to\dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} \le (2 + p^{d+\alpha} c_{\lambda_2}) \cdot \mathcal{C} \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)}$$

ở đây c_{λ_2} *là hằng số được xác định như trong Bổ đề 2.1 và*

$$\mathcal{C} = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \max\{1, |s(t)|^{(d+\alpha)\lambda_1}\} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1} \cdot \left|\log |s(t)|_p\right| \psi(t) dt.$$

2.3.3. Chứng minh kết quả chính

Để thuận tiện cho việc trình bày chứng minh chúng tôi sử dụng các kí hiệu sau

$$\begin{aligned}
&|B_\gamma|_\omega = \omega(B_\gamma) \\
&b_{\gamma,\omega} = b_{B_\gamma,\omega} \\
&b_{a,\gamma,\omega} = b_{aB_\gamma,\omega} \quad \text{với } a \in \mathbb{Q}_p \\
&|aB_\gamma|_\omega = \omega(aB_\gamma) \\
&L_\omega^{q,\lambda} = L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d) \\
&\dot{B}_\omega^{q,\lambda} = \dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right) \\
&CBMO_\omega^{q,\lambda} = CBMO_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right).
\end{aligned}$$

Chứng minh Định lý 2.3. Giả sử rằng cả $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ hữu hạn. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski và Định lí 1.4 về đổi biến số p-adic, ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left|U_{\psi,s}^{p,b}f(x)\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq&\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star}|b(x)-b\left(s(t)x\right)|\left|f\left(s(t)x\right)\right|\psi(t)dt\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq&\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star}|b(x)-b_{\gamma,\omega}|\left|f\left(s(t)x\right)\right|\psi(t)dt\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star}\left|b_{\gamma,\omega}-b_{s(t),\gamma,\omega}\right|\left|f\left(s(t)x\right)\right|\psi(t)dt\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star}\left|b\left(s(t)x\right)-b_{s(t),\gamma,\omega}\right|\left|f\left(s(t)x\right)\right|\psi(t)dt\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
=:&\ I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

Để đánh giá I_1 và I_3, đầu tiên lưu ý rằng $\omega\left(tB_\gamma\right)=|t|_p^{d+\alpha}\omega\left(B_\gamma\right)$, do đó theo bất đẳng thức Minkowski, I_1 không lớn hơn

$$\begin{aligned}
&|B_\gamma|_\omega^{-\frac{1}{q}-\lambda}\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star}\left(\int\limits_{B_\gamma}|b(x)-b_{\gamma,\omega}|^{q_2}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_2}}\left(\int\limits_{B_\gamma}\left|f\left(s(t)x\right)\right|^{q_1}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_1}}\psi(t)dt\\
&\leq\|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}}\cdot\|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}}\int_{\mathbb{Z}_p^\star}|s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\psi(t)dt.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$I_1\leq\|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}}\cdot\|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}}\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star}|s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\psi(t)dt. \tag{2.12}$$

Tương tự, ta có

$$I_3\leq\|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}}\cdot\|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}}\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star}|s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda}\psi(t)dt. \tag{2.13}$$

Đối với I_2, áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} |f(s(t)x)|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left| b_{\gamma,\omega} - b_{s(t),\gamma,\omega} \right| \psi(t)dt \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q_1}} \int\limits_{B_\gamma} |f(s(t)x)|^{q_1} \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \cdot \left| b_{\gamma,\omega} - b_{s(t),\gamma,\omega} \right| \psi(t)dt \\
&\leq \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}} \cdot \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|^{(d+\alpha)\lambda} \cdot \left| b_{\gamma,\omega} - b_{s(t),\gamma,\omega} \right| \cdot \psi(t)dt.
\end{aligned}$$

Từ giả thiết của Định lí, với hầu khắp nơi $t \in \mathbb{Z}_p^\star$, tồn tại số nguyên γ' sao cho $|s(t)|_p = p^{\gamma'}$. Áp dụng Bổ đề 2.1 với $\lambda = 0$, ta được

$$\begin{aligned}
\left| b_{\gamma,\omega} - b_{s(t),\gamma,\omega} \right| &= \left| b_{\gamma,\omega} - b_{\gamma+\gamma',\omega} \right| \\
&\leq p^{d+\alpha} \cdot |\gamma'| \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}} \\
&= p^{d+\alpha} \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}} \left| \log_p |s(t)|_p \right|.
\end{aligned}$$

Do vậy, ta có

$$I_2 \leq p^{d+\alpha} \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}} \cdot \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda} \left| \log_p |s(t)|_p \right| \psi(t)dt. \quad (2.14)$$

Kết hợp (2.12), (2.13) và (2.14) ta thu được

$$I_1 + I_2 + I_3 \leq \left(2\mathcal{A} + p^{d+\alpha}\mathcal{B}\right) \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}} \cdot \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}}.$$

Vậy $U_{\psi,s}^{p,b}$ bị chặn từ $\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ vào $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Hơn nữa,

$$\|U_{\psi,s}^{p,b}\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda} \to \dot{B}_\omega^{q,\lambda}} \leq \left(2\mathcal{A} + p^{d+\alpha}\mathcal{B}\right) \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2}}.$$

Bây giờ giả sử rằng $U_{\psi,s}^{p,b}$ được xác định như một toán tử bị chặn từ $\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ vào $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Lấy $b_0(x) = \log_p |x|_p$, do Bổ đề 1.2 và Bổ đề 1.4 suy ra $b_0 \in CBMO_\omega^{q_2}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Vì $\left|U_{\psi,s}^{p,b} f_0(x)\right| = f_0(x) \cdot \mathcal{B}_\star$, do bổ đề 1.5 ta có

$$\begin{aligned}
\|U_{\psi,s}^{p,b} f_0\|_{\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} &= \|f_0\|_{\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)} \cdot \mathcal{B}_\star \\
&= \left(\frac{\|f_0\|_{\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}}{\|f_0\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}} \cdot \mathcal{B}_\star \right) \|f_0\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}.
\end{aligned}$$

Do đó $\mathcal{B}_\star$ hữu hạn. $\square$

Chứng minh Định lí 2.4. Lý luận tương tự trong chứng minh của Định lý 2.3, với mỗi $\gamma \in \mathbb{Z}$, ta có

$$\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} |U_{\psi,s}^{p,b} f(x)|^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

trong đó

$$I_1 \leq \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}} \cdot \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}} \cdot \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1} \cdot \psi(t)dt,$$

$$I_3 \leq \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}} \cdot \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}} \cdot \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1} \cdot \psi(t)dt$$

và I_2 được đánh giá như sau

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} \left(\int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \left|(b_{s(t),\gamma,\omega} - b_{\gamma,\omega}) f(s(t)x)\right| \psi(t)dt\right)^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} |f(s(t)x)|^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} |b_{s(t),\gamma,\omega} - b_{\gamma,\omega}|\psi(t)dt \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q_1}} \int\limits_{B_\gamma} |f(s(t)x)|^{q_1} \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega} \int\limits_{B_\gamma} \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&= |B_\gamma|_\omega^{-\lambda_2} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \left(\frac{1}{|s(t)B_\gamma|_\omega^{1+\lambda_1 q_1}} \int\limits_{s(t)B_\gamma} |f(y)|^{q_1} \omega(y)dy\right)^{\frac{1}{q_1}} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1} \times \\
&\qquad \times |b_{s(t),\gamma,\omega} - b_{\gamma,\omega}|\psi(t)dt \\
&\leq \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}} |B_\gamma|_\omega^{-\lambda_2} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1} |b_{s(t),\gamma,\omega} - b_{\gamma,\omega}|\psi(t)dt.
\end{aligned}$$

Với mỗi $t \in \mathbb{Z}_p^\star$ sao cho $s(t) \neq 0$ tồn tại $\gamma' = \gamma'(t) \in \mathbb{Z}$ sao cho $|s(t)|_p = p^{\gamma'}$. Áp dụng Bổ đề 2.1 ta thu được

$$\begin{aligned}
|b_{\gamma,\omega} - b_{s(t),\gamma,\omega}| &= |b_{\gamma,\omega} - b_{\gamma+\gamma',\omega}|, \\
&\leq p^{d+\alpha} c_{\lambda_2} |\gamma'| \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}} \max\{|B_\gamma|_\omega^{\lambda_2}, |B_{\gamma'+\gamma}|_\omega^{\lambda_2}\}.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq p^{d+\alpha} c_{\lambda_2} \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}} \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \max\{1, p^{\gamma'(d+\alpha)\lambda}\} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1} \times \\
&\quad \times \left|\log_p |s(t)|_p\right| \psi(t) dt \\
&\leq p^{d+\alpha} c_{\lambda_2} \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}} \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}} \int\limits_{\mathbb{Z}_p^\star} \max\{1, |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1}\} |s(t)|_p^{(d+\alpha)\lambda_1} \times \\
&\quad \times \left|\log_p |s(t)|_p\right| \psi(t) dt.
\end{aligned}
$$

Do vậy ta thu được

$$
I_1 + I_2 + I_3 \leq (2 + p^{d+\alpha} c_{\lambda_2}) \mathcal{C} \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}} \|f\|_{\dot{B}_\omega^{q_1,\lambda_1}}.
$$

Vậy

$$
\|U_{\psi,s}^{p,b}\|_{\dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} \leq (2 + p^{d+\alpha} c_{\lambda_2}) \cdot \|b\|_{CBMO_\omega^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)} \cdot \mathcal{C}.
$$

Điều này kết thúc chứng minh Định lý 2.4. □

Kết luận của chương 2

Trong chương 2 chúng tôi thu được những kết quả sau:

- Chúng tôi tìm được chuẩn của toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên không gian p-adic Morrey $L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$, không gian p-adic tâm Morrey $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ và không gian p-adic $CBMO_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$, trong đó trọng ω được lấy trong lớp hàm trọng $\mathcal{W}_\alpha^p$.
- Chúng tôi đưa ra được một điều kiện cần và một điều kiện đủ đối với hàm trọng $\psi(t)$ và hàm tham số $s(t)$ để giao hoán tử $U_{\psi,s}^{p,b}$ bị chặn trên không gian p-adic tâm Morrey có trọng với biểu trưng trong không gian p-adic tâm BMO có trọng.

Chương 3

TOÁN TỬ ĐA TUYẾN TÍNH P-ADIC HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM P-ADIC

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu các tiêu chuẩn cho tính bị chặn và chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro trên tích các không gian Lebesgue p-adic và tích các không gian kiểu Morrey trên tường p-adic. Lược đồ chứng minh các kết quả chúng tôi sử dụng ở đây được phát triển từ lược đồ đã được sử dụng trong chương trước, kết hợp với các phương pháp được sử dụng trong nghiên cứu các toán tử đa tuyến tính trên trường thực hay trên các nhóm compact địa phương. Bài toán tương ứng đặt cho giao hoán tử của toán tử p-adic Hardy-Cesàro cũng được chúng tôi nghiên cứu trong chương này. Phương pháp nghiên cứu ở đây đó là vận dụng phương pháp của Coifman, Rochberg, Weiss [14] trong nghiên cứu toán tử giao hoán tử cho tích phân kì dị, toán tử cực đại, ... Bên cạnh đó, chúng tôi sẽ thiết lập đánh giá dao động giữa trung bình của hai hàm thuộc $CBMO$, từ đó thiết lập các đánh giá L^p cho các toán tử tích phân loại trung bình. Điểm khác biệt ở đây chính là đối với các toán tử tích phân kì dị, ta thường thông qua bất đẳng thức John-Nirenberg, thì ở đây chúng tôi đánh giá trực tiếp thông qua các bất đẳng thức tích phân Minkowski và Hölder.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo 2. trong danh mục công trình đã công bố.

3.1. Đặt bài toán

Các toán tử đa tuyến tính, đặc biệt là các toán tử song tuyến tính có vai trò quan trọng trong lý thuyết hàm, chẳng hạn như tính đối ngẫu của các không gian L^p. Trong giải tích điều hoà, việc nghiên cứu các toán tử đa tuyến tính nảy sinh một cách tự nhiên trong quá trình nghiên cứu các toán tử tích phân.

Bài toán nghiên cứu tính bị chặn của các toán tử Hardy song tuyến tính, đa tuyến tính được bắt đầu từ các công trình của E. Sawyer năm 1987. Tuy nhiên, phải đến gần đây, năm 2012, mới có những công bố đầu tiên về

chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy của Fu, Grafakos, Lu và Zhao [26] trên tích các không gian Lebesgue với trọng luỹ thừa (nhắc lại rằng đây là dạng đa tuyến tính của toán tử trung bình trên hình cầu theo nghĩa của Faris). Năm 2014, nhóm tác giả Fu, Gong, Lu, Yuan [29, 32] đã chứng minh H_ω^m bị chặn từ $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$ vào $L^p(\mathbb{R}^n)$ khi và chỉ khi

$$\mathcal{A}_1 := \int\limits_{0<t_1,t_2,\ldots,t_m<1} \left(\prod_{i=1}^m t_i^{-\frac{n}{p_i}}\right) \omega(\vec{t})d\vec{t} < \infty.$$

Hơn nữa chuẩn toán tử chính là $\mathcal{A}_1$. Ở đây nhắc lại,

$$H_\omega^m(\vec{f})(x) = \int\limits_{0<t_1<\cdots<t_m<1} \left(\prod_{i=1}^m f_i(t_i x)\right) \omega(\vec{t})d\vec{t}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

Năm 2015, các tác giả Hung và Ky [35] phát triển các kết quả trong [29] cho toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro cho bởi công thức (10) và giao hoán tử của chúng trên tích các không gian Lebesgue và trên tích các không gian tâm Morrey với trọng thuộc lớp trọng luỹ thừa. Các tác giả thu được kết quả tốt hơn các kết quả của Fu, Gong, Lu, Yuan trong [29] như sau: với các hàm $s_1, \ldots, s_m : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ là các hàm đo được sao cho $|s_k(t_1, \ldots, t_n)| \geq \min t_1^\beta, \ldots, t_d^\beta$ hầu khắp nơi $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n, \beta > 0, 1 \leq p_k < \infty, k = 1, \ldots, m, \vec{s} = (s_1, \ldots, s_m), (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ thoả mãn điều kiện $\mathcal{W}_{\vec{\alpha}}$ thì toán tử $U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}$ bị chặn từ $L_{\omega_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L_{\omega_m}^{p_m}(\mathbb{R}^n)$ vào $L_\omega^p(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathbb{A} := \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{k=1}^m |s_k(t)|^{-\frac{d+\alpha_k}{p_k}}\right) \psi(t)dt < \infty$$

và chuẩn của toán tử đúng bằng $\mathbb{A}$.

Trên trường p-adic chưa có một kết quả nào nghiên cứu chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro. Chính vì vậy, chúng tôi đặt ra việc tiếp tục phát triển các kết quả đã thu được trong chương 2 cho trường hợp đa tuyến tính. Những kết quả này trong trường số thực đã được nghiên cứu trong [35]. Đối với giao hoán tử, do tính phức tạp, chúng tôi chỉ đặt vấn đề nghiên cứu bất đẳng thức trọng chuẩn cho giao hoán tử của toán tử song tuyến tính. Chúng tôi sẽ chỉ ra một số kết quả thu được trên trường p-adic là tốt hơn so với các kết quả trên trường số thực.

Định nghĩa 3.1. Cho m, n là các số nguyên dương và $\psi : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to [0; +\infty)$, $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_m) : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to \mathbb{Q}_p^m$ là các hàm đo được. Toán tử đa

tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng $U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}$ xác định đối với vectơ của các hàm đo được $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{C}^m$, được định nghĩa như sau

$$U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}(f_1, \ldots, f_m)(x) = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{m} f_k\left(s_k(t)x\right) \right) \psi(t)dt, \tag{3.2}$$

với $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_m)$.

3.2. Chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro trên tích các không gian Lebesgue và tích các không gian kiểu Morrey

Cho $X, X_1, \ldots, X_m$ là $L^q_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$ hay $L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$. Mục đích của phần này là tìm điều kiện đặc trưng của hàm $\psi(t)$ và $s_1(t), \ldots, s_m(t)$ sao cho

$$\|U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}(f_1, \ldots, f_m)\|_{X_1\times\cdots\times X_m} \leq C \prod_{k=1}^{m} \|f_k\|_{X_k} \tag{3.3}$$

đúng với bất kỳ $f_1, \ldots, f_k$. Chúng tôi cũng đưa ra công thức xác định hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức trên. Để cho tiện ta sẽ kí hiệu hằng số tốt nhất đó là

$$C = \left\|U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}\right\|_{X_1\times\cdots\times X_m\to X}.$$

Để chứng minh các kết quả chính chúng tôi cần một số khái niệm và bổ đề quan trọng sau.

3.2.1. Một số khái niệm và bổ đề

Trong chương này, nếu không đề cập cụ thể đến thì ta luôn giả thiết q, α, q_i, α_j là các số thực, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq q_j < \infty$, $\alpha_j > -d$ với mỗi $j = 1, \ldots, m$ sao cho

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}, \tag{3.4}$$

và

$$\alpha = \frac{q\alpha_1}{q_1} + \cdots + \frac{q\alpha_m}{q_m}. \tag{3.5}$$

Cho các hàm trọng $\omega_k \in \mathcal{W}^p_{\alpha_k}, k = 1, \ldots, m$. Đặt

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^{m} \omega_k^{\frac{q}{q_k}}(x), \tag{3.6}$$

khi đó ta có $\omega \in \mathcal{W}^p_\alpha$.

Định nghĩa 3.2. Cho các hàm trọng $\omega_k \in \mathcal{W}^p_{\alpha_k}, k = 1, \ldots, m$. Ta nói rằng $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}^p_{\vec{\alpha}}$ nếu

$$\omega(S_0) \geq \prod_{k=1}^{m} \omega_k(S_0)^{\frac{q}{q_k}}. \tag{3.7}$$

Ví dụ 3.1. *Cho các hàm trọng $\omega_k \in \mathcal{W}^p_{\alpha_k}, k = 1, \ldots, m$ với $\omega_k(x) = |x|_p^{\alpha_k}$ với $k = 1, \ldots, m$ thì $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}^p_{\vec{\alpha}}$.*

Trong toàn bộ chương này, $s_1, \ldots, s_m$ là các hàm đo được từ $\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ vào $\mathbb{Q}_p$ và ta kí hiệu bởi $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_m)$.

Bổ đề dưới đây là một ví dụ cho hàm thuộc không gian $L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$.

Bổ đề 3.1 ([34], tr. 873)**.** *Cho $\omega \in \mathcal{W}^p_\alpha, \alpha > -d$ và $\gamma > 0$. Khi đó, các hàm*

$$f_{r,\gamma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x|_p < 1 \\ |x|_p^{-\frac{d+\alpha}{r} - \frac{1}{\gamma^2}} & \text{nếu } |x|_p \geq 1, \end{cases}$$

thuộc $L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$ và $||f_{r,\gamma}||_{L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} = \left(\dfrac{\omega(S_0)}{1 - p^{-r/\gamma^2}}\right)^{1/r} > 0.$

Chứng minh. Từ định nghĩa của $f_{r,\gamma}$ ta có

$$\begin{aligned}
||f_{r,\gamma}||^r_{L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} &= \int\limits_{\mathbb{Q}_p^d} |f_{r,\gamma}|^r \omega(x)dx \\
&= \int\limits_{|x|_p \geq 1} |x|_p^{-(d+\alpha+\frac{r}{\gamma^2})} \omega(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{S_k} p^{-k(d+\alpha+\frac{r}{\gamma^2})} \omega(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{S_0} p^{-k(d+\alpha+\frac{r}{\gamma^2})} p^{k\alpha+kd} \omega(y)dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p^{-\frac{kr}{\gamma^2}} \omega(S_0) \\
&= \frac{1}{1 - p^{-\frac{r}{\gamma^2}}} \omega(S_0) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Vậy $f_{r,\gamma} \in L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$ với mỗi γ và $||f_{r,\gamma}||_{L^r_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} = \left(\frac{\omega(S_0)}{1-p^{-\frac{r}{\gamma^2}}}\right)^{\frac{1}{r}} > 0.$ □

3.2.2. Các kết quả chính

Các kết quả chính của mục này là các Định lí 3.1, Định lí 3.2, Định lí 3.3.

Định lí 3.1. *Cho $m, n \in \mathbb{N}, f_i \in L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{Q}_p^d)$, q, α, q_i, α_j là các số thực, $1 \le q < \infty$, $1 \le q_j < \infty$, $\alpha_j > -d$ với mỗi $j = 1, \dots, m$ sao cho $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_m}$, $\alpha = \frac{q\alpha_1}{q_1} + \dots + \frac{q\alpha_m}{q_m}, \omega_k \in \mathcal{W}^p_{\alpha_k}$, $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}^p_{\vec{\alpha}}$ và tồn tại một hằng số $\beta > 0$ thỏa mãn $|s_k(t_1, \dots, t_n)|_p \ge \min\{|t_1|_p^\beta, \dots, |t_n|_p^\beta\}$ đúng với mọi $k = 1, \dots, m$ và với $(t_1, \dots, t_n) \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ hầu khắp nơi. Khi đó, tồn tại một hằng số C sao cho bất đẳng thức sau*

$$||U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}(f_1, \dots, f_m)||_{L^q_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} \le C \prod_{k=1}^m ||f_k||_{L^{q_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)} \tag{3.8}$$

đúng với bất kỳ hàm đo được $f_1, \dots, f_m$ khi và chỉ khi

$$\mathcal{A} := \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}} \psi(t)dt < \infty. \tag{3.9}$$

Hơn nữa, dưới giả thiết (3.9) thì ta có

$$\left\|U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}\right\|_{L^{q_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d)\times\dots\times L^{q_m}_{\omega_m}(\mathbb{Q}_p^d)} = \mathcal{A}.$$

Định lí 3.2. *Cho $m, n \in \mathbb{N}, f_i \in L^{q_i,\lambda_i}_{\omega_i}(\mathbb{Q}_p^d), 1 \le q, q_k < \infty, \alpha, \alpha_k, \lambda_k$ là các số thỏa mãn (3.4), (3.5) sao cho $-\frac{1}{q_k} < \lambda_k < 0, \omega_k \in \mathcal{W}^p_{\alpha_k}$ với $k = 1, \dots, m$. Giả sử rằng $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}^p_{\vec{\alpha}}$. Đặt*

$$\lambda = \frac{d+\alpha_1}{d+\alpha}\lambda_1 + \dots + \frac{d+\alpha_m}{d+\alpha}\lambda_m.$$

Giả thiết rằng

$$\mathcal{B} = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \psi(t)dt < \infty \tag{3.10}$$

và

$$(\omega(B_0))^{\frac{1+\lambda q}{q}} \ge \prod_{k=1}^m (\omega_k(B_0))^{\frac{1+\lambda_k q_k}{q_k}} \tag{3.11}$$

với B_0 là hình cầu $\{x \in \mathbb{Q}_p^d : |x|_p \le 1\}$. Khi đó, tồn tại một hằng số C sao cho bất đẳng thức

$$||U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}(f_1, \dots, f_m)||_{L^{q,\lambda}_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} \le C \prod_{k=1}^m ||f_k||_{L^{q_k,\lambda_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)} \tag{3.12}$$

đúng với bất kỳ hàm các đo được $f_1, \ldots, f_m$. Hơn nữa, hằng số tốt nhất C trong (3.12) bằng $\mathcal{B}$.

Định lí 3.3. *Cho $m, n \in \mathbb{N}$, $f_i \in \dot{B}^{q_i,\lambda_i}_{\omega_i}(\mathbb{Q}_p^d)$, $\omega_k \in \mathcal{W}^p_{\alpha_k}$, $q, q_k, \lambda, \alpha_k, \lambda_k$, là các số thỏa mãn các điều kiện trong Định lí 3.2 và các điều kiện (3.4), (3.5) cũng được thỏa mãn. Giả sử rằng $(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ thỏa mãn điều kiện $\mathcal{W}^p_{\vec{\alpha}}$. Khi đó $U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}$ xác định một toán tử bị chặn từ $\dot{B}^{q_1,\lambda_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \cdots \times \dot{B}^{q_m,\lambda_m}_{\omega_m}(\mathbb{Q}_p^d)$ vào $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$. Hơn nữa,*

$$||U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}||_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d)\times\cdots\times\dot{B}^{q_m,\lambda_m}_{\omega_m}(\mathbb{Q}_p^d)\to\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)} = \mathcal{B}. \tag{3.13}$$

Chứng minh Định lí 3.1 . Với các giả thiết của Định lí ta có $\omega \in \mathcal{W}^p_{\vec{\alpha}}$. Giả sử rằng $\mathcal{A}$ hữu hạn. Cho $f_k \in L^{q_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)$. Sử dụng các bất đẳng thức Minkowski, Hölder và phương pháp đổi biến $p-$adic (1.5), ta được

$$\begin{aligned}
&||U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}(f_1, \ldots, f_m)||_{L^q_\omega(\mathbb{Q}_p^d)} \\
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{Q}_p^d} \left(\int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^m |f_k\left(s_k(t)x\right)|\right)\psi(t)dt \right)^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\int\limits_{\mathbb{Q}_p^d} \prod_{k=1}^m |f_k\left(s_k(t)x\right)|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt \\
&\leq \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^m \left(\int\limits_{\mathbb{Q}_p^d} |f_k\left(s_k(t)x\right)|^{q_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \psi(t)dt \\
&= \mathcal{A} \left(\prod_{k=1}^m ||f_k||_{L^{q_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Do đó $U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn từ $L^{q_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \cdots \times L^{q_m}_{\omega_m}(\mathbb{Q}_p^d)$ vào $L^q_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$ và hằng số tốt nhất C trong (3.8) thỏa mãn

$$C \leq \mathcal{A}. \tag{3.14}$$

Ngược lại, giả sử rằng $U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}$ là toán tử xác định và bị chặn từ $L^{q_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \cdots \times L^{q_m}_{\omega_m}(\mathbb{Q}_p^d)$ vào $L^q_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$. Cho γ là số dương tùy ý và với mỗi $k = 1, \ldots, m$, ta đặt $\gamma_k := \sqrt{\frac{q_k}{q}}\,\gamma$ và

$$f_{q_k,\gamma_k}(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } |x|_p \leq 1, \\ |x|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}-\frac{1}{\gamma_k^2}}, & \text{nếu } |x|_p \geq 1. \end{cases}$$

Theo Bổ đề 3.1, $f_{q_k,\gamma_k} \in L^{q_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)$ và $||f_{q_k,\gamma_k}||_{L^{q_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)} = \left(\dfrac{\omega_k(S_0)}{1-p^{-\frac{q_k}{\gamma_k^2}}}\right)^{\frac{1}{q_k}} > 0.$

Cố định $x \in \mathbb{Q}_p^d$ với $|x|_p \geq 1$ và đặt

$$E_x = \bigcap_{k=1}^{m} \left\{t \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \,:\, |s_k(t)x|_p > 1\right\}.$$

Vì $|s_k(t_1,\ldots,t_n)|_p \geq \min\{|t_1|_p^\beta,\ldots,|t_n|_p^\beta\}$ với hầu khắp nơi $t=(t_1,\ldots,t_n) \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$, tồn tại một tập con F của $\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ có độ đo 0 chứa tập E_x nghĩa là

$$E_x \subset \left\{t \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n : |t|_p \geq |x|_p^{-1/\beta}\right\} \setminus F.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
&||U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}(f_{q_1,\gamma_1},\ldots,f_{q_m,\gamma_m})||^q_{L^q_\omega(\mathbb{Q}_p^d)}\\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^d} \left|\int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^m f_{q_k,\gamma_k}(s_k(t)x)\right)\psi(t)dt\right|^q \omega(x)dx\\
&= \int_{|x|_p\geq 1} \left(\prod_{k=1}^m |x|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}-\frac{1}{\gamma_k^2}}\right)^q \left|\int_{E_x}\prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}-\frac{1}{\gamma_k^2}}\psi(t)dt\right|^q \omega(x)dx\\
&\geq \int_{|x|_p\geq 1} |x|_p^{-d-\alpha-\frac{q}{\gamma^2}} \left(\int_{E_x}\prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}-\frac{1}{\gamma_k^2}}\psi(t)dt\right)^q \omega(x)dx\\
&\geq \int_{|x|_p\geq p^\gamma} |x|_p^{-d-\alpha-\frac{q}{\gamma^2}}\omega(x)dx \left(\int_{E_x}\prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}-\frac{1}{\gamma_k^2}}\psi(t)dt\right)^q\\
&= p^{-\frac{q}{\gamma}}\prod_{k=1}^m ||f_{q_k,\gamma_k}||^q_{L^{q_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)} \left(\int_{E_x}\prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}-\frac{1}{\gamma_k^2}}\psi(t)dt\right)^q.
\end{aligned}$$

Kí hiệu $E = \left\{t \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n : |t|_p \geq p^{-\gamma/\beta}\right\}$. Do $|s_k(t_1,\ldots,t_n)|_p \geq \min\{|t_1|_p^\beta, \ldots, |t_n|_p^\beta\}$ với hầu khắp nơi $t=(t_1,\ldots,t_n) \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$, suy ra $E_x \supset E$. Do vậy ta thu được bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
\int_E \prod_{k=1}^m |s_k(t)|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}-\frac{1}{\gamma_k^2}}\psi(t)dt &\leq p^{\frac{1}{\gamma}}\frac{||U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}(f_{q_1,\gamma_1},\ldots,f_{q_m,\gamma_m})||}{\prod_{k=1}^m ||f_{q_k,\gamma_k}||_{L^{q_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)}}\\
&\leq Cp^{\frac{1}{\gamma}},
\end{aligned}$$

ở đó C là hằng số trong (3.8). Cho $\gamma \to \infty$, do định lí hội tụ bị chặn Lebesgue, ta thu được

$$\int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{m} |s_k(t)|_p^{-\frac{d+\alpha_k}{q_k}} \psi(t)dt \le C. \tag{3.15}$$

Từ (3.9) và (3.15) ta suy ra rằng $\mathcal{A}$ là hằng số tốt nhất trong (3.8). □

Nhận xét 3.1. Với $m = n = 1$ ta nhận được Định lí 3.1 trong [34]. Lưu ý rằng bất đẳng thức (13) cho hai dãy số thực không âm là hệ quả trực tiếp của Định lí 3.1 trong [34]. Mặt khác, với $s(t) = t$ và $\omega \equiv 1$, thì

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{\mathbb{Z}_p^\star} |t|_p^{-d/q} dt \\
&= \sum_{\gamma \le 0} \int_{S_\gamma} |t|_p^{-d/q} dt \\
&= (1 - p^{-d}) \sum_{\gamma \ge 0} p^{d\gamma(1/q-1)}.
\end{aligned}$$

Do đó, trong trường hợp này, $\mathcal{A}$ hữu hạn khi và chỉ khi $q > 1$. Vậy S^p không bị chặn trên $L^1(\mathbb{Q}_p)$ và với $1 < q < \infty$ thì

$$\|S^p\|_{L^q(\mathbb{Q}_p) \to L^q(\mathbb{Q}_p)} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1 - p^{-1/q'}}$$

trong đó

$$S^p f(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} f(tx)dt.$$

Chứng minh Định lí 3.2 . Giả sử rằng $\mathcal{B}$ hữu hạn, do $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}$, nên theo bất đẳng thức Minkowski, Hölder và công thức đổi biến, ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma(a)\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma(a)} \left| U_{\psi,\vec{s}}^{p,m,n}(f_1, \ldots, f_m)(x) \right|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
\le &\int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma(a)\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma(a)} \left| \prod_{k=1}^{m} f_k(s_k(t)x) \right|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt \\
\le &\int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{\omega_k\left(B_\gamma(a)\right)^{1+\lambda_k q_k}} \int_{B_\gamma(a)} |f_k(s_k(t)x)|^{q_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \psi(t)dt \\
= &\int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{\omega_k\left(s_k(t)B_\gamma(a)\right)^{1+\lambda_k q_k}} \int_{s_k(t)B_\gamma(a)} |f_k(y)|^{q_k} \omega_k(y)dy \right)^{\frac{1}{q_k}} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{m} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \right) \psi(t)dt$$
$$\leq \mathcal{B} \left(\prod_{k=1}^{m} ||f_k||_{L_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}(\mathbb{Q}_p^d)} \right).$$

Ước lượng cuối cùng suy ra $U_{\psi,\vec{s}}^{p,m,n}$ là toán tử bị chặn từ $L_{\omega_1}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \cdots \times L_{\omega_m}^{q_m,\lambda_m}(\mathbb{Q}_p^d)$ vào $L_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ và hằng số tốt nhất C trong (3.12) không lớn hơn $\mathcal{B}$.

Ngược lại, lấy $f_{0k}(x) = |x|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k}$ với $k = 1, \ldots, m$. Chú ý rằng $\lambda > -\frac{1}{q}$ nên theo Bổ đề 1.3, ta có $f_{0k}(x) \in L_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}(\mathbb{Q}_p^d)$, $\|f_{0k}\|_{L_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}(\mathbb{Q}_p^d)} > 0$ và $f_0(x) = |x|_p^{(d+\alpha)\lambda} \in L_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
U_{\psi,\vec{s}}^{p,m,n}(f_{01}, \ldots, f_{0m})(x) &= \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{m} f_{0k}(s_k(t)x)\psi(t)dt \\
&= \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{m} |s_k(t)x|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \psi(t)dt \\
&= |x|_p^{(d+\alpha)\lambda} \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{m} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \psi(t)dt \\
&= \mathcal{B} \cdot f_0(x).
\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}
\left\|U_{\psi,\vec{s}}^{p,m,n}(f_{01}, \ldots, f_{0m})\right\|_{L_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} &= \mathcal{B} \cdot \|f_0\|_{L_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)} \\
&\leq C \cdot \|f_0\|_{L_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)}.
\end{aligned}$$

Vậy $\mathcal{B}$ không lớn hơn C (C là hằng số trong (3.12)). Vậy Định lý 3.2 được chứng minh. □

Chứng minh Định lí 3.3 . Từ chứng minh của Định lí 3.2 với $a = 0$ ta thu được

$$\left(\frac{1}{\omega\left(B_\gamma\right)^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} \left|U_{\psi,\vec{s}}^{p,m,n}(f_1, \ldots, f_m)(x)\right|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \mathcal{B} \cdot \prod_{k=1}^{m} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)}$$

với mọi $f_k \in \dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Từ đó suy ra $U_{\psi,\vec{s}}^{p,m,n}$ bị chặn trên $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ nếu $\mathcal{B}$ hữu hạn.

Chiều ngược lại chứng minh tương tự như chứng minh của Định lí 3.2 bởi vì $f_{0k} \in L^{q_k,\lambda_k}_{\omega_k}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ suy ra rằng $f_{0k} \in \dot{B}^{q_k,\lambda_k}_{\omega_k}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ với $k = 1, \ldots, m$ và $f_0(x) = |x|_p^{(d+\alpha)\lambda} \in \dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.2. Khẳng định của Định lý 3.3 tốt hơn khẳng định của Định lý 3.4 trong [35] ở chỗ chúng tôi tìm ra được chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy- Cesàro, còn khẳng định của định lý 3.4 trong [35] chỉ mới đưa ra được điều kiện của hàm trọng để có bất đẳng thức ngược lại mà chưa đưa ra được chính xác chuẩn của toán tử. Hơn nữa chúng tôi còn tìm được chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy- Cesàro trên tích các không gian Morrey.

Nhận xét 3.3. Trường hợp $m = n = 1$ từ Định lí 3.2 và 3.3 ta thu được Định lí 2.1 trong Chương 2 của luận án này.

3.3. Tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử song tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng

Trên trường p-adic, giao hoán tử của toán tử tích phân kiểu Hardy đã được nghiên cứu trong rất nhiều bài báo gần đây (xem [11, 34, 56, 57, 59] và các tài liệu tham khảo trong đó). Để tiếp nối các nghiên cứu đó chúng tôi cũng nghiên cứu giao hoán tử của toán tử song tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng $U^{p,2,n}_{\psi,\vec{s}}$ với biểu trưng trong $CBMO^q_\omega\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.

3.3.1. Các giao hoán tử

Chúng tôi định nghĩa giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng, theo ý tưởng của Coifman-Rochberg-Weiss [14] như sau.

Định nghĩa 3.3. Cho $m, n \in \mathbb{N}, \psi : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to [0, \infty), s_1, \ldots, s_m : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to \mathbb{Q}_p, b_1, \ldots, b_m$, là các hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{Q}_p^d$ và $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{C}$ là các hàm đo được. Giao hoán tử của toán tử p-adic đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng $U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}$ được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} &U^{p,m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(f_1, \ldots, f_m)(x) = \\ &= \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k(s_k(t)x)\right) \left(\prod_{k=1}^m (b_k(x) - b_k(s_k(t)x))\right) \psi(t)dt. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Đặt

$$\mathcal{C}_m = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{m} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \right) \psi(t)dt. \tag{3.17}$$

$$\mathcal{D}_m = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{m} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \right) \left(\prod_{k=1}^{m} \left| \log_p |s_k(t)|_p \right| \right) \psi(t)dt. \tag{3.18}$$

Với $m = 2$ ta có định nghĩa của giao hoán tử của toán tử song tuyến tính p-adic Hardy- Cesàro có trọng như sau:

Định nghĩa 3.4. Cho $n \in \mathbb{N}, \psi : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to [0, \infty), s_1, s_2 : \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n \to \mathbb{Q}_p, b_1, b_2$, là các hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{Q}_p^d$ và $f_1, f_2 : \mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{C}$ là các hàm đo được. Giao hoán tử của toán tử song tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng $U_{\psi,\vec{s}}^{p,n}$ được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} &U_{\psi,\vec{s}}^{p,n,\vec{b}}(f_1, f_2)(x) = \\ &= \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{2} f_k(s_k(t)x) \right) \left(\prod_{k=1}^{2} (b_k(x) - b_k(s_k(t)x)) \right) \psi(t)dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Đặt

$$\mathcal{C}_2 = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \right) \psi(t)dt \tag{3.20}$$

và

$$\mathcal{D}_2 = \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \right) \left(\prod_{k=1}^{2} \left| \log_p |s_k(t)|_p \right| \right) \psi(t)dt. \tag{3.21}$$

Nhận xét 3.4. $\mathcal{D}_2 < \infty$ không suy ra $\mathcal{C}_2 < \infty$.

Thật vậy, nếu $s_k(t) \equiv 1$ và $\psi(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{|t_1|_p \cdots |t_n|_p}$ thì $\mathcal{D}_2 = 0$ nhưng $\mathcal{C}_2 = \infty$.

Nhận xét 3.5. Ngược lại, $\mathcal{C}_2 < \infty$ cũng không suy ra được $\mathcal{D}_2 < \infty$.

Thật vậy, với $s_1(t) = \frac{1}{p}$, $s_2(t_1, \ldots, t_n) = t_1$ và

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = \frac{g(t_1)}{\prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k}},$$

ở đây hàm

$$g(t_1) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } |t_1|_p = 1, \\ \frac{1}{|t_1|_p \log_p^2 |t_1|_p} & \text{nếu } |t_1|_p < 1. \end{cases} \tag{3.22}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2 &= \left|\mathbb{Z}_p^\star\right|^{n-1} \cdot \int_{\mathbb{Z}_p^\star} g(t_1)dt_1 \\ &= \left|\mathbb{Z}_p^\star\right|^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{j^2} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_2 &= \left|\mathbb{Z}_p^\star\right|^{n-1} \cdot \int_{\mathbb{Z}_p^\star} \left|\log_p |t_1|_p\right| g(t_1)dt_1 \\ &= \left|\mathbb{Z}_p^\star\right|^{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{j} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

3.3.2. Các kết quả chính

Định lí 3.4. *Cho* $m, n \in \mathbb{N}, f_i \in \dot{B}^{q_i,\lambda_i}_{\omega_i}(\mathbb{Q}_p^d), 1 < q < q_k < \infty, 1 < p_k < \infty, -\frac{1}{p_k} < \lambda_k < 0, \omega_i \in \mathcal{W}^p_{\alpha_k}, k = 1, 2,$ *sao cho*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

và $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. *Giả thiết rằng* $\omega_i \in \mathcal{W}^p_{\alpha_k}, k = 1, 2, \omega(x) = \omega_1^{\frac{q}{q_1}+\frac{q}{p_1}} \cdot \omega_2^{\frac{q}{q_2}+\frac{q}{p_2}} \in \mathcal{W}^p_\alpha, \alpha = \frac{q\alpha_1}{q_1} + \frac{q\alpha_1}{p_1} + \frac{q\alpha_2}{q_2} + \frac{q\alpha_2}{p_2}$ *và*

$$\omega(B_0)^{\frac{1+\lambda q}{q}} \geq \prod_{k=1}^{2} \omega_k(B_0)^{\frac{1+\lambda_k q_k}{q_k}+\frac{1}{p_k}}.$$

(i) Nếu cả $\mathcal{C}_2$ *và* $\mathcal{D}_2$ *hữu hạn và với bất kỳ các hàm* $b = (b_1, b_2) \in CBMO^{p_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times CBMO^{p_2}_{\omega_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ *thì* $U^{p,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}$ *bị chặn từ* $\dot{B}^{q_1,\lambda_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \dot{B}^{q_2,\lambda_2}_{\omega_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ *vào* $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$.

(ii) Nếu với bất kỳ $b = (b_1, b_2) \in CBMO^{p_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times CBMO^{p_2}_{\omega_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ *và* $U^{p,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}$ *bị chặn từ* $\dot{B}^{q_1,\lambda_1}_{\omega_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \dot{B}^{q_2,\lambda_2}_{\omega_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ *vào* $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$ *thì* $\mathcal{D}_2$ *hữu hạn.*

Hệ quả 3.1. *Cho* $m, n \in \mathbb{N}, f_i \in \dot{B}^{q_i,\lambda_i}_{\omega_i}(\mathbb{Q}_p^d), 1 < q < q_k < \infty, 1 < p_k < \infty, -\frac{1}{p_k} < \lambda_k < 0, k = 1, 2,$ *sao cho*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

và $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, các hàm trọng được giả thiết như trong định lý 3.4. Hơn nữa, giả thiết rằng $|s_k(t)|_p > 1$ hầu khắp nơi với $t \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ hoặc $|s_k(t)|_p < 1$ hkn với $t \in \left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n$ với mỗi $k = 1, 2$. Khi đó, $U_{\psi,\vec{s}}^{p,n,\vec{b}}$ bị chặn từ $\dot{B}_{\omega_1}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times \dot{B}_{\omega_2}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ vào $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ nếu và chỉ nếu $\mathcal{D}_2$ hữu hạn.

Thật vậy, vì $|x|_p > 1$ nên $|x|_p \geq p$, do đó ta có $\mathcal{D}_2 \geq (\log p)\, \mathcal{C}_2$. Vậy hệ quả 3.1 được suy ra trực tiếp từ Định lí 3.4.

3.3.3. Chứng minh kết quả chính

Để thuận tiện cho việc trình bày chứng minh chúng tôi sử dụng các kí hiệu sau

$$
\begin{aligned}
&|B_\gamma|_{\omega_i}^{1+\lambda_i q_i} = \omega_i(B_\gamma)^{1+\lambda_i q_i}\\
&|sB_\gamma|_{\omega_i}^{1+\lambda_i q_i} = \omega_i(s_i(t)B_\gamma)^{1+\lambda_i q_i}\\
&|B_\gamma|_{\omega}^{1+\lambda q} = \omega(B_\gamma)^{1+\lambda q}\\
&b_{i,\gamma} = b_{i,B_\gamma}\\
&b_{\gamma,\omega} = b_{B_\gamma,\omega}\\
&b_{s\gamma,\omega} = b_{s(t)B_\gamma,\omega}\\
&|sB_\gamma|_{\omega}^{1+\lambda q} = \omega(s(t)B_\gamma)^{1+\lambda q}\\
&b_{i,\gamma,\omega_i} = b_{i,B_\gamma,\omega_i}\\
&b_{i,s\gamma} = b_{i,s_i(t)B_\gamma}\\
&b_{i,s\gamma,\omega_k} = b_{i,s_i(t)B_\gamma,\omega_i}\\
&L_\omega^{q,\lambda} = L_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)\\
&\dot{B}_\omega^{q,\lambda} = \dot{B}_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)\\
&CMO_\omega^{q,\lambda} = CMO_\omega^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right).
\end{aligned}
$$

Chứng minh Định lý 3.4. Giả sử rằng $\mathcal{C}_2$ và $\mathcal{D}_2$ hữu hạn. Đặt $\vec{b} = (b_1, b_2) \in CBMO_{\omega_1}^{p_1}(\mathbb{Q}_p^d) \times CBMO_{\omega_2}^{p_2}(\mathbb{Q}_p^d)$, $\bar{f}(x) = \prod_{k=1}^2 |f_k(s_k(t)x)|$, áp dụng bất

đẳng thức Minkowski ta có

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}\left|U_{\psi,\vec{s}}^{p,n,\vec{b}}(f_1,f_2)(x)\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\bar{f}(x)\prod_{k=1}^{2}|b_k(x)-b_k(s_k(t)x)|\,\psi(t)dt\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\bar{f}(x)\prod_{k=1}^{2}|b_k(x)-b_k(s_k(t)x)|\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\psi(t)dt.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Lấy bất kỳ $x_i, y_i, z_i, t_i \in \mathbb{C}$ với $i = 1, 2$. Ta có bất đẳng thức cơ bản sau.

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2}|(x_i-y_i)| \leq &\prod_{k=1}^{2}|(x_i-z_i)| + \prod_{k=1}^{2}|(y_i-t_i)| + \prod_{k=1}^{2}|(z_i-t_i)| +\\
&+ (|(x_1-z_1)(z_2-t_2)|) + (|(x_2-z_2)(z_1-t_1)|)\\
&+ (|(x_1-z_1)(y_2-t_2)|) + (|(x_2-z_2)(y_1-z_1)|)\\
&+ (|(z_1-t_1)(y_2-t_2)|) + (|(z_2-t_2)(y_1-t_1)|)\,.
\end{aligned}
$$

Để thuận tiện ta kí hiệu bởi $b_{i,\gamma,\omega} = \int_{B_\gamma}\frac{1}{\omega(B_\gamma)}b_i(x)\omega(x)dx$ với $i = 1, 2$. Áp dụng bất đẳng thức trên với $x_i = b_i(x), y_i = b_i(s_i(t)x), z_i = b_{i,\gamma}, t_i = b_{i,s\gamma}$ và sử dụng bất đẳng thức Minkowski, ta thu được

$$I \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6,$$

với

$$I_1 = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\bar{f}(x).\prod_{k=1}^{2}|b_k(x)-b_{k,\gamma,\omega_k}|\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\psi(t)dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\bar{f}(x).\prod_{k=1}^{2}|b_k(s_k(t)x)-b_{k,s\gamma,\omega_k}|\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\psi(t)dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}}\int\limits_{B_\gamma}\left(\bar{f}(x).\prod_{k=1}^{2}|b_{k,\gamma,\omega_k}-b_{k,s\gamma,\omega_k}|\right)^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\psi(t)dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} \left(\bar{f}(x) \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \left|(b_i(x)-b_{i,\gamma})(b_{j,\gamma}-b_{j,s\gamma,\omega_j})\right| \right)^q \times \right.$$

$$\left. \times\, \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt,$$

$$I_5 = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} \left(\bar{f}(x) \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \left|(b_i(x)-b_{i,\gamma})(b_j(s_j(t)x)-b_{j,s\gamma,\omega_j})\right| \right)^q \times \right.$$

$$\left. \times\, \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt$$

và

$$I_6 = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} \left(\bar{f}(x) \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \left|(b_{i,\gamma}-b_{i,s\gamma})(b_j(s_j(t)x)-b_{j,s\gamma,\omega_j})\right| \right)^q \times \right.$$

$$\left. \times\, \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt.$$

Chọn $q < s_1 < \infty$ và $q < s_2 < \infty$ sao cho $\frac{1}{s_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}$ và $\frac{1}{s_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}$. Chú ý rằng $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{q}$. Áp dụng bất đẳng thức Hölder ta có

$$I_1 \leq \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{B_\gamma} |f_k(s_k(t)x)|^{q_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}} \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{B_\gamma} |b_k(x) - b_{k,\gamma,\omega_k}|^{p_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{p_k}} \psi(t)dt$$

$$\leq \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|s_k B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{s_k B_\gamma} |f_k(y)|^{q_k} \omega_k(y)dy \right)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\times \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}} \int\limits_{B_\gamma} |b_k(x) - b_{k,\gamma,\omega_k}|^{p_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{p_k}} \psi(t)dt$$

$$\leq \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \prod_{k=1}^{2} \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \psi(t)dt$$

$$= \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \prod_{k=1}^{2} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \psi(t)dt.$$

Tương tự đánh giá của I_1, ta có

$$I_2 \leq \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{B_\gamma} |f_k(s_k(t)x)|^{q_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}} \int\limits_{B_\gamma} |b_k(s_k(t)x) - b_{k,s\gamma,\omega_k}|^{p_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{p_k}} \psi(t)dt$$

$$\leq \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|s_k B_\gamma|_\omega^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{s_k B_\gamma} |f_k(y)|^{q_k} \omega_k(y)dy \right)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\times \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|s_k B_\gamma|_{\omega_k}} \int\limits_{s_k B_\gamma} |b_k(y) - b_{k,s\gamma,\omega_k}|^{p_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{p_k}} \psi(t)dt$$

$$= \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_\omega^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \prod_{k=1}^{2} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \psi(t)dt.$$

Bây giờ ta sẽ đánh giá I_3, áp dụng bất đẳng thức Hölder ta được

$$I_3 = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} \left(\prod_{k=1}^{2} |f_k(s_k(t)x)| \, \omega(x) \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{2} |b_{k,\gamma,\omega_k} - b_{k,s_k\gamma,\omega_k}| \, \psi(t)dt$$

$$\leq \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k s_k}} \int\limits_{B_\gamma} |f_k(s_k(t)x)|^{s_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{s_k}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{2} |b_{k,\gamma,\omega_k} - b_{k,s\gamma,\omega_k}| \, \psi(t)dt$$

$$\leq \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|s_k B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{s_k B_\gamma} |f_k(y)|^{q_k} \omega_k(y) dy \right)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\times \prod_{k=1}^{2} |b_{k,\gamma,\omega_k} - b_{k,s_k\gamma,\omega_k}| \, \psi(t) dt$$

$$\leq \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} |b_{k,\gamma,\omega_k} - b_{k,s\gamma,\omega_k}| \, \psi(t) dt.$$

Theo giả thiết của định lí, ta có $t \in \mathbb{Z}_p^\star$ hầu khắp nơi nên tồn tại một số nguyên γ' sao cho $|s(t)|_p = p^{\gamma'}$. Áp dụng Bổ đề 2.1 với $\lambda = 0$ ta được

$$\begin{aligned} |b_{k,\gamma,\omega_k} - b_{k,s\gamma,\omega_k}| &= |b_{k,\gamma,\omega_k} - b_{k,\gamma+\gamma',\omega_k}| \\ &\leq p^{d+\alpha_k} |\gamma'| . \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \\ &= p^{d+\alpha_k} \left| \log_p |s_k(t)|_p \right| . \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}}. \end{aligned}$$

Do vậy ta thu được

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \prod_{k=1}^{2} p^{d+\alpha_k} \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \prod_{k=1}^{2} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \times \\ &\qquad \times \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \left| \log_p |s_k(t)|_p \right| \psi(t) dt \\ &\leq p^{2d+\alpha} \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \prod_{k=1}^{2} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \times \\ &\qquad \times \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \left| \log_p |s_k(t)|_p \right| \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Bây giờ ta ước lượng I_4, ta chọn $1 < s < \infty$ thỏa mãn $\frac{1}{s} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Đặt

$$\bar{b}_{i,j}(x) = \left| (b_i(x) - b_{i,\gamma})(b_{j,\gamma} - b_{j,s\gamma,\omega_j}) \right|.$$

Theo bất đẳng thức Minkowski và bất đẳng thức Hölder suy ra rằng

$$I_4 \leq C \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,2}} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} \left(\prod_{k=1}^{2} |f_k(s_k(t)x)| \, \bar{b}_{i,j}(x) \right)^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \psi(t) dt$$

$$\leq C \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{B_\gamma} |f_k(s_k(t)x)|^{q_k} \omega_k(x)dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_i}} \int\limits_{B_\gamma} |b_i(x) - b_{i,\gamma}|^s \omega_i(x)dx \right)^{\frac{1}{s}} \left| b_{j,\gamma} - b_{j,s\gamma,\omega_j} \right| \right) \psi(t)dt$$

$$\leq C \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|s_k B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{s_k B_\gamma} |f_k(y)|^{q_k} \omega_k(y) \right.$$

$$\left. dy \right)^{\frac{1}{q_k}} \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_i}} \int\limits_{B_\gamma} |b_i(x) - b_{i,\gamma}|^s \omega_i(x)dx \right)^{\frac{1}{s}} \left| b_{j,\gamma} - b_{j,s\gamma,\omega_j} \right| \right) \psi(t)dt$$

$$\leq C \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \psi(t) \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_i}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int\limits_{B_\gamma} |b_i(x) - b_{i,\gamma}|^s \omega_i(x)dx \right)^{\frac{1}{s}} \left| b_{j,\gamma} - b_{j,s\gamma,\omega_j} \right| \right) dt.$$

Kết hợp với đánh giá của I_1 và I_3, ta suy ra rằng

$$I_4 \leq C \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \prod_{k=1}^{2} \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} p^{d+\alpha_j} \left| \log_p |s_j(t)|_p \right| \right) \psi(t)dt$$

$$\leq C \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \prod_{k=1}^{2} \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{2} p^{d+\alpha_k} \left| \log_p |s_k(t)|_p \right| \right) \psi(t)dt.$$

Lập luận tương tự các đánh giá của I_1, I_2, I_3, I_4 ta có

$$I_5 \leq C \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} \left(\prod_{k=1}^{2} |f_k(s_k(t)x)| \, |b_i(x) - b_{i,\gamma}| \times \right.\right.$$

$$\times \left|b_j(s_j(t)x) - b_{j,s\gamma,\omega_j}\right|\Bigg)^q \omega(x)dx\Bigg)^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt$$

$$\leq C \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{B_\gamma} |f_k(s_k(t)x)|^{q_k} \omega_k(x)dx\right)^{\frac{1}{q_k}} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_i}} \times\right.$$

$$\left.\int\limits_{B_\gamma} |b_i(x) - b_{i,\gamma}|^{p_i} \omega_i(x)dx\right)^{\frac{1}{p_i}} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_j}} \int\limits_{B_\gamma} \left|b_j(s_j(t)x) - b_{j,s\gamma,\omega_j}\right|^{p_j} \omega_j(x)dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

$$\times \psi(t)dt$$

$$\leq C \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \Bigg(\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \|b_i\|_{CBMO_{\omega_i}^{p_i}} \times$$

$$\times \|b_j\|_{CBMO_{\omega_j}^{p_j}}\Bigg) \psi(t)dt$$

$$\leq C \prod_{k=1}^{2} |B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k} \|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}} \prod_{k=1}^{2} \|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \psi(t)dt.$$

Tương tự ta cũng có đánh giá của I_6 như sau

$$I_6 = \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} \left(\bar{f}(x) \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} |(b_{i,B_\gamma} - b_{i,s_i(t)B_\gamma})(b_j(s_j(t)x) -\right.\right.$$

$$\left.\left. b_{j,s_j(t)B_\gamma,\omega_j})|\right)^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt$$

$$\leq C \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int_{B_\gamma} \left(\prod_{k=1}^{2} |f_k(s_k(t)x)|\, |(b_{i,\gamma} - b_{i,s\gamma})| \times\right.\right.$$

$$\left.\left. |(b_j(s_j(t)x) - b_{j,s\gamma,\omega_j})|\right)^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \psi(t)dt$$

$$\leq C \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}} \prod_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}} \int\limits_{B_\gamma} |f_k(s_k(t)x)|^{q_k} \omega_k(x)dx\right)^{\frac{1}{q_k}} \times$$

$$\left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_j}}\int\limits_{B_\gamma}\left|b_j(s_j(t)x)-b_{j,s\gamma,\omega_j}\right|^s\omega_j(x)dx\right)^{\frac{1}{s}}|b_{i,\gamma}-b_{i,s\gamma}|\,\psi(t)dt$$

$$=C\int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\prod_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_k}^{1+\lambda_k q_k}}\int\limits_{B_\gamma}|f_k(s_k(t)x)|^{q_k}\omega_k(x)dx\right)^{\frac{1}{q_k}}\Bigg(\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}}$$

$$\left(\frac{1}{|B_\gamma|_{\omega_j}}\int\limits_{B_\gamma}\left|b_j(s_j(t)x)-b_{j,s\gamma,\omega_j}\right|^s\omega_j(x)dx\right)^{\frac{1}{s}}|b_{i,\gamma}-b_{i,s\gamma}|\Bigg)\psi(t)dt$$

$$\leq C\prod_{k=1}^{2}|B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k}\|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}}\prod_{k=1}^{2}\|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}}\int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\prod_{k=1}^{2}|s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k}$$

$$\times\left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1,2}}p^{d+\alpha_i}\left|\log_p|s_i(t)|_p\right|\right)\psi(t)dt$$

$$=C\prod_{k=1}^{2}|B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k}\|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}}\prod_{k=1}^{2}\|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}}\int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\prod_{k=1}^{2}|s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k}$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{2}p^{d+\alpha_k}\left|\log_p|s_k(t)|_p\right|\right)\psi(t)dt.$$

Kết hợp các đánh giá của I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 và I_6 ta được

$$I=\left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega}\int_{B_\gamma}\left|U_{\psi,\vec{s}}^{p,n,\vec{b}}(f_1,f_2)(x)\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\prod_{k=1}^{2}|B_\gamma|_{\omega_k}^{\lambda_k}\|f_k\|_{\dot{B}_{\omega_k}^{q_k,\lambda_k}}\prod_{k=1}^{2}\|b_k\|_{CBMO_{\omega_k}^{p_k}}\int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n}\prod_{k=1}^{2}|s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k}\times$$

$$\left(3+C+p^{2d+\alpha}\prod_{k=1}^{2}\left|\log_p|s_k(t)|_p\right|+2C\left(\sum_{k=1}^{2}p^{d+\alpha_k}\left|\log_p|s_k(t)|_p\right|\right)\right)\psi(t)dt.$$

Vậy phần đầu của Định lí 3.4 được chứng minh.

Ngược lại, giả sử rằng $U_{\psi,\vec{s}}^{p,n,\vec{b}}$ bị chặn từ $\dot{B}_{\omega_1}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^d)\times\dot{B}_{\omega_2}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^d)$ vào $\dot{B}_\omega^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$. Lấy $b_1(x)=b_2(x)=\log_p|x|_p$ thì $b_1,b_2\in BMO_\omega(\mathbb{Q}_p^d)$ (xem [34]–Bổ đề 6.1). Bởi vì $BMO_\omega(\mathbb{Q}_p^d)\subset CBMO_\omega^q(\mathbb{Q}_p^d)$ với bất kỳ $1<q<\infty$, ta thu được $b_k\in CBMO_{\omega_k}^{p_k}(\mathbb{Q}_p^d)$. Đặt $f_k(x)=|x|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k}$, do Bổ đề 1.5 suy ra

$f_k(x)$ thuộc $\dot{B}^{q_k,\lambda_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)$, $f_0(x) = |x|_p^{(d+\alpha)\lambda} \in \dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{Q}_p^d)$. Ta có

$$\begin{aligned}
&U^{p,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(f_1, f_2)(x)\\
&= \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)x|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left(\log_p |x|_p - \log_p |s_k(t)x|_p\right) \psi(t)dt\\
&= \prod_{k=1}^{2} |x|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left(\log_p \frac{1}{|s_k(t)|_p}\right) \psi(t)dt\\
&= f_0(x) \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left(\log_p \frac{1}{|s_k(t)|_p}\right) \psi(t)dt.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\|U^{p,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(f_1, f_2)\|_{\dot{B}^{q_k,\lambda_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)}\\
&= \left(\frac{1}{|B_\gamma|_\omega^{1+\lambda q}} \int\limits_{B_\gamma} |f_0(x)|^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \int\limits_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left|\log_p \frac{1}{|s_k(t)|_p}\right|\\
&\times \psi(t)dt\\
&= \|f_0\|_{\dot{B}^{q_k,\lambda_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)} \int_{\left(\mathbb{Z}_p^\star\right)^n} \prod_{k=1}^{2} |s_k(t)|_p^{(d+\alpha_k)\lambda_k} \prod_{k=1}^{2} \left|\log_p |s_k(t)|_p\right| \psi(t)dt\\
&= \mathcal{D}_2 \cdot \|f_0\|_{\dot{B}^{q_k,\lambda_k}_{\omega_k}(\mathbb{Q}_p^d)}.
\end{aligned}$$

Vậy $\mathcal{D}_2$ hữu hạn.

Nhận xét 3.6. Vì $|x|_p > 1$ tương đương với $|x|_p \geq p$ nên nếu $|s(t)|_p > 1$ hầu khắp nơi $t \in (\mathbb{Z}^\star)^n$ hoặc $|s(t)|_p < 1$ hầu khắp nơi $t \in (\mathbb{Z}^\star)^n$ thì ta có ngay điều kiện cần và đủ để giao hoán tử $U^{p,m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn đó là $\mathcal{D}_m$ hữu hạn, còn đối với trường hợp xét trên trường số thực, nếu $|s(t)| \geq c > 1$ với mọi $t \in ([0;1])^n$ hoặc $|s(t)| \leq c < 1$ với mọi $t \in ([0;1])^n$ thì điều kiện cần và đủ để giao hoán tử $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn đó là $\mathcal{D}_m$ hữu hạn. Như vậy qua phân tích trên ta thấy kết quả trên trường p-adic có mở rộng hơn kết quả trên trường thực.

Kết luận của chương 3

Trong chương này, chúng tôi đưa ra được các kết quả sau:

- Chúng tôi tìm được chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian p-adic Lebesgue có trọng, tích các không gian p-adic Morrey có trọng $L_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ và tích các không gian p-adic tâm Morrey có trong $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$.

- Chúng tôi đưa ra được một điều kiện cần và một điều kiện đủ đối với lớp hàm trọng $\psi(t)$ để giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng là bị chặn trên tích các không gian p-adic tâm Morrey có trọng $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ với biểu trưng trong không gian p-adic tâm BMO có trọng.

Chương 4

TOÁN TỬ ĐA TUYẾN TÍNH HARDY-CESÀRO VÀ GIAO HOÁN TỬ TRÊN TÍCH CÁC KHÔNG GIAN LOẠI HERZ

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz và tích các không gian Morrey-Herz. Đầu tiên chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu bài toán. Tiếp theo sử dụng phương pháp của Xiao [58] và đã được vận dụng trong nhiều công trình khác nhau như [19, 22, 26, 35], các kĩ thuật từ giải tích đa tuyến tính (chẳng hạn xem [31]), chúng tôi thu được toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro bị chặn trên tích các không gian Herz và tích các không gian Morrey-Herz. Cuối cùng để nghiên cứu tính bị chặn của giao hoán tử, chúng tôi dựa vào phương pháp của Coifman-Rochberg-Weiss [14], phương pháp đánh giá trong giải tích đa tuyến tính và lược đồ nghiên cứu đã được hình thành trong [26, 29] và đặc biệt trong [35], chúng tôi chứng minh giao hoán tử của toán tử này bị chặn từ tích các không gian tâm Morrey vào không gian tâm Morrey với biểu trưng trong không gian Lipschitz.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo 3. trong danh mục công trình đã công bố.

4.1. Đặt vấn đề

Như đã chỉ ra ở phần Lời nói đầu và trong phần đầu chương 3, động lực cho nghiên cứu các toán tử đa tuyến tính xuất hiện một cách tự nhiên từ các nghiên cứu về toán tử tích phân kì dị. Kenig và Stein [37] chỉ ra được tính liên tục của toán tử đa tuyến tính Riesz tương ứng khi $1 < p_1, p_2 \leq \infty$ và $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{\beta}{d}$ chỉ với hạn chế $0 < \beta < d$ và $r < \infty$. Mặt khác, trong một trường hợp đặc biệt thì các toán tử đa tuyến tính trung bình với trọng Hardy sai khác với dạng một phía toán tử Riesz, một hàm trọng luỹ thừa. Vì vậy những kết quả về $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ sẽ kéo theo các kết quả tương ứng cho toán tử Riemann-Liouville. Điều này cũng đã được chỉ ra trong các công trình [29, 35].

Phải đến rất gần đây, bài toán nghiên cứu tính chuẩn của các toán tử

Hardy đa tuyến tính mới có lời giải cho trường hợp toán tử trung bình trên hình cầu theo nghĩa của Faris, bởi nhóm tác giả Fu, Grafakos, Lu và Zhao [26]. Năm 2014, nhóm tác giả Fu, Gong, Lu, Yuan [29, 32] đưa ra công thức tìm chuẩn của toán tử

$$H_\omega^m(\vec{f})(x) = \int\limits_{0<t_1,\cdots,t_m<1} \left(\prod_{i=1}^m f_i(t_i x)\right) \omega(\vec{t})d\vec{t}, x \in \mathbb{R}^n,$$

từ tích các không gian Lebesgue và không gian Lebesgue và tích các không gian tâm Morrey vào không gian tâm Morrey. Một điều kiện cần và một điều kiện đủ về tính bị chặn của giao hoán tử (của H_ω^m) trên tích các không gian Lebesgue, tích các không gian tâm Morrey, Morrey-Herz được đưa ra trong [29, 32]. Trong đó kết quả của Gong, Fu và Ma [32] có thể phát biểu như sau: với $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}, 1 < p, p_i, q, q_i < \infty, \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m, \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}, \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}, i = 1, \ldots, m$ thì H_ω^m bị chặn từ tích các không gian Herz thuần nhất $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p_1} \times \cdots \times \dot{K}_{q_m}^{\alpha_m,p_m}$ vào không gian Herz $\dot{K}_q^{\alpha,p}$ nếu

$$\mathcal{C} = \int\limits_{0<t_1,\ldots,t_m<1} \left(\prod_{i=1}^m t_i^{-(\alpha_i+\frac{n}{q_i})}\right) \omega(\vec{t})d\vec{t} < \infty.$$

Ngược lại, nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = (\frac{1}{m})\alpha, q_i = mq, p_i = mp, i = 1, \ldots, m$ và H_ω^m bị chặn từ tích các không gian Herz thuần nhất $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p_1} \times \cdots \times \dot{K}_{q_m}^{\alpha_m,p_m}$ vào không gian Herz $\dot{K}_q^{\alpha,p}$ thì $\mathcal{C} < \infty$ và chuẩn của toán tử chính là $\mathcal{C}$. Các tác giả cũng thu được một kết quả tương tự cho toán tử này trên tích các không gian Morrey-Herz, phát biểu như sau: cho $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}, \lambda, \lambda_i > 0, 1 < p, p_i, q, q_i < \infty, i = 1, \ldots, m, \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m, \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}, \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}, \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$, nếu

$$\mathcal{E} = \int\limits_{0<t_1,\ldots,t_m<1} \left(\prod_{i=1}^m t_i^{-(\alpha_i+\frac{n}{q_i}-\lambda_i)}\right) \omega(\vec{t})d\vec{t} < \infty$$

thì H_ω^m bị chặn từ tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất $M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \times \cdots \times M\dot{K}_{p_m,q_m}^{\alpha_m,\lambda_m}$ vào không gian Morrey-Herz $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$. Tuy nhiên trong trường hợp ngược lại, các tác giả đòi hỏi giả thiết khá mạnh đó là với $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \frac{1}{m}\alpha, \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \frac{1}{m}\lambda, q_i = mq, p_i = mp, i = 1, \ldots, m$, và nếu H_ω^m bị chặn từ tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất $M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \times \cdots \times M\dot{K}_{p_m,q_m}^{\alpha_m,\lambda_m}$ vào không gian Morrey-Herz $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$ thì $\mathcal{E} < \infty$ và chuẩn trong trường hợp đặc biệt này chính bằng $\mathcal{E}$. Trong chương này, chúng tôi sẽ cải tiến kết quả này và hơn nữa chúng tôi xem

xét cả trường hợp $0 < p < 1$. Điểm khác biệt nằm ở chỗ cách tiếp cận của chúng tôi cho trường hợp này sẽ thay thế phương pháp sử dụng bất đẳng thức Minkowski bằng một đánh giá đặc trưng cho các hàm trong không gian Morrey-Herz.

Bên cạnh đó, năm 2011, Tang và đồng sự [52] đưa ra được một điều kiện cần cho tính bị chặn trong không gian Morrey-Herz như sau: với $\psi : [0,1] \to [0,\infty)$ đo được, $0 < \beta < 1, b \in Lip_\beta(\mathbb{R}^d, 0 < q_2 \leq q_1 < \infty)$, nếu $\int\limits_0^1 t^{-(\alpha+\beta+\frac{d}{q_2}-\lambda)}\psi(t)dt < \infty$ thì U_ψ^b bị chặn từ $M\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha,+\beta+\frac{d}{q_2}-\lambda}(\mathbb{R}^d)$ vào $M\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^d)$. Câu hỏi đặt ra ở đây là cải tiến điều kiện cần, liệu ta có thể thay $\int\limits_0^1 t^{-(\alpha+\beta+\frac{d}{q_2}-\lambda)}\psi(t)dt < \infty$ bằng một điều kiện tốt hơn không? Trong chương này chúng tôi sẽ cải tiến kết quả này và đưa ra phản ví dụ để so sánh với kết quả đã biết của Tang cùng đồng sự công bố trong [52].

4.2. Tính bị chặn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz và Morrey-Herz.

Toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng được xác định như sau: Cho $m, n \in \mathbb{N}, \psi : [0,1]^n \to [0,\infty)$, $s_1, \ldots, s_m : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ là các hàm đo được. Toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng $U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}$, được định nghĩa bởi

$$U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}\left(\vec{f}\right)(x) = \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{k=1}^m f_k\left(s_k(t)x\right)\right)\psi(t)dt, \tag{4.1}$$

với $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_m)$.

Nhận xét 4.1. i) Khi $s_k(t) \equiv t$, và $m = n$, $U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}$ trở thành $\mathcal{H}_\psi^m$ được giới thiệu bởi Fu và các cộng sự trong [29].

ii) Nếu $m = n$, $d = 1$ và $\alpha \in (0, m)$, chọn

$$\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left|(1-t_1, \ldots, 1-t_m)\right|^{m-\alpha}}$$

thì $U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}\left(\vec{f}\right)(x) = x^{-\alpha} I_\alpha^m\left(\vec{f}\right)(x)$ với $x > 0$, trong đó

$$I_\alpha^m\left(\vec{f}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0<t_1,\ldots,t_m<x} \frac{\prod\limits_{i=1}^m f_i(t_i)}{\left|(1-t_1, \ldots, 1-t_m)\right|^{m-\alpha}} dt_1 \ldots dt_m.$$

Lưu ý rằng, I_α^m có thể coi như là trường hợp của toán tử đa tuyến tính Riesz một phía của toán tử thế vị Riesz đa tuyến tính $\mathcal{J}_\alpha^m$ được nghiên cứu bởi Kenig và Stein [37],

$$\mathcal{J}_\alpha^m(\vec{f})(x) = \int\limits_{t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} f_k(t_k)}{|(x-t_1,\ldots,x-t_m)|^{m-\alpha}} dt_1\ldots dt_m.$$

Trong mục này chúng tôi phát biểu và chứng minh các kết quả về tính bị chặn và chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Herz và tích các không gian Morrey-Herz.

4.2.1. Một số khái niệm và bổ đề

Chúng tôi nhắc lại định nghĩa của lớp hàm trọng thuần nhất giới thiệu bởi Chuong và Hung trong [11].

Định nghĩa 4.1. Cho γ là một số thực bất kỳ. Đặt $\mathcal{W}_\gamma$ là tập tất cả các hàm ω xác định trên $\mathbb{R}^d$ đo được, thỏa mãn $\omega(x) > 0$ hầu khắp nơi với $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < \int\limits_{S_d} \omega(y)d\sigma(y) < \infty$ và thuần nhất tuyệt đối bậc γ, nghĩa là $\omega(tx) = |t|^\gamma\omega(x)$, với mọi $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, x \in \mathbb{R}^d$.

Chú ý rằng $\mathcal{W} = \bigcup\limits_\gamma \mathcal{W}_\gamma$ chứa tất cả các hàm trọng lũy thừa $\omega(x) = |x|^\gamma$.

Để cho thuận tiện chúng tôi đưa ra vài kí hiệu chung cho cả mục này.

Cho $\beta > 0, \gamma, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ là các số thực, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m > -d$, $0 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $1 \le p_i, q_i < \infty$ với $i = 1, \ldots, m$ và $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \alpha,\\
&\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p},\\
&\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_m} = \frac{1}{q},\\
&\frac{\gamma_1}{q_1} + \frac{\gamma_2}{q_2} + \cdots + \frac{\gamma_m}{q_m} = \frac{\gamma}{q},\\
&\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = \lambda.
\end{aligned}$$

$$S_d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$$

$$S_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Các hàm ω_i thuộc vào lớp $\mathcal{W}_{\gamma_i}$ với mọi $i = 1, \ldots, m$, đặt

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{m} \omega_i^{\frac{q}{q_i}}(x). \tag{4.2}$$

Với cách định nghĩa của ω như trên ta thấy $\omega \in \mathcal{W}_\gamma$.

Sau đây là các bổ đề cần thiết để chứng minh các kết quả chính của chương này.

Bổ đề 4.1. *Cho $p \geq 1$ và $(f_k)_{k\geq 1}$ là các hàm không âm và đo được trên $[0,1]^n$. Khi đó ta có*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{[0,1]^n} f_k(t)dt \right)^p \leq \left(\int\limits_{[0,1]^n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^p(t) \right)^{1/p} dt \right)^p.$$

Chứng minh của Bổ đề 4.1 suy ra trực tiếp từ đặc trưng của chuẩn của không gian ℓ^p.

Bổ đề 4.2. *Nếu $f \in M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)$ thì $\|f\chi_k\|_{q,\omega} \leq 2^{k(\lambda-\alpha)}\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)}$.*

Chứng minh của Bổ đề 4.2 suy trực tiếp từ Định nghĩa 1.2.

4.2.2. Các kết quả chính

Các kết quả chính của phần này được phát biểu bởi Định lí 4.1, Định lí 4.2 như sau

Định lí 4.1. (i) *Cho $s_1(t), \ldots, s_m(t) \neq 0$ hầu khắp nơi trong $[0,1]^n$ và*

$$\mathcal{A}_1 = \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\alpha_i - \frac{d+\gamma_i}{q_i} + \lambda_i} \right) \psi(t)dt < \infty. \tag{4.3}$$

Giả sử rằng $1 \leq p < \infty$ hoặc $0 < p < 1$ và ít nhất một trong số các $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dương thì

$$\|U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}(\vec{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)} \leq C_{\vec{\alpha},\vec{\lambda}} \cdot \mathcal{A}_1 \cdot \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)} \tag{4.4}$$

với

$$C_{\vec{\alpha},\vec{\lambda}} = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{m} \left(2^{|\alpha_k-\lambda_k|}+1\right) & \text{nếu} \quad 1 \le p < \infty \\ \frac{2^{\lambda}}{\left(2^{\lambda p}-1\right)^{1/p}} \prod\limits_{k=1}^{m} \left(2^{|\alpha_k-\lambda_k|}+1\right) & \text{nếu} \quad 0 < p < 1 \ \text{ và } \ \lambda > 0. \end{cases}$$

(ii) *Ngược lại, cho* $0 < p < \infty$, $0 < \lambda_i < \infty$ *với* $i = 1, \ldots, m$. *Giả sử rằng* $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ *xác định một toán tử bị chặn từ* $\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)$ *vào* $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ *thì (4.3) đúng và*

$$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}\|_{\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i) \to M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} \ge \mathcal{A}_1 \cdot D_{\vec{\alpha},\vec{\lambda}}, \tag{4.5}$$

với

$$D_{\vec{\alpha},\vec{\lambda}} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(2^{\lambda_i p_i}-1)^{1/p_i}}{(2^{\lambda p}-1)^{1/p}} \cdot \frac{\left(1-2^{-q(\lambda-\alpha)}\right)^{1/q}}{\prod\limits_{i=1}^{m}(1-2^{-q_i(\lambda_i-\alpha_i)})^{1/q_i}} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(q_i(\lambda_i-\alpha_i))^{1/q_i}}{(q(\lambda-\alpha))^{1/q}} \cdot \frac{(\omega(S_d))^{1/q}}{\prod\limits_{i=1}^{m}(\omega_i(S_d))^{1/q_i}}.$$

Định lí 4.2. (i) *Nếu* $1 \le p < \infty$, $s_1(t), \ldots, s_m(t) \ne 0$ *hầu khắp nơi trong* $[0,1]^n$ *và*

$$\mathcal{A}_2 = \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}-\alpha_i}\right) \psi(t)dt < \infty \tag{4.6}$$

thì

$$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{\dot{K}^{\alpha,p}_q(\omega)} \le \mathcal{A}_2 \cdot \prod_{k=1}^{m}\left(2^{|\alpha_k|}+1\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{\dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i)}. \tag{4.7}$$

(ii) *Giả sử rằng* $|s_i(t_1, \ldots, t_n)| \ge \min\{t_1^{\beta}, \ldots, t_n^{\beta}\}$ *với* $i = 1, \ldots, m$ *và* $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ *bị chặn từ* $\prod\limits_{i=1}^{m} \dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i)$ *vào* $\dot{K}^{\alpha,p}_q(\omega)$ *thì (4.6) đúng và*

$$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}\|_{\prod\limits_{i=1}^{m} \dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i) \to \dot{K}^{\alpha,p}_q(\omega)} \ge \mathcal{A}_2 \cdot E_{\vec{\alpha}}, \tag{4.8}$$

ở đó

$$E_{\vec{\alpha}} = \frac{(mp)^{1/p}}{\prod\limits_{i=1}^{m} p_i^{1/p_i}} \cdot \left(\frac{2^{q\alpha}-1}{q\alpha}\right)^{1/q} \cdot \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{q_i\alpha_i}{2^{q_i\alpha_i}-1}\right)^{1/q_i} \cdot \frac{(\omega(S_d))^{1/q}}{\prod\limits_{i=1}^{m}(\omega_i(S_d))^{1/q_i}}.$$

Nhận xét 4.2. Khi $\alpha_i = 0, i = 1 \cdots m$ ta thu được tính bị chặn và chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro trên tích các không gian Lebesgue.

Tuy nhiên, các kết quả này không tốt bằng các kết quả đã thu được trong [35]. Trong [35, Định lí 3.1], các tác giả chỉ ra rằng chuẩn của $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ từ $L^{p_1}_{\omega_1} \times \cdots \times L^{p_m}_{\omega_m}$ vào L^p_ω chính xác bằng $\int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod\limits_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}-\alpha_i} \right) \psi(t)dt$.

Nhận xét 4.3. Từ kết quả của Định lí 4.2 chúng ta suy ra, trong trường hợp tồn tại hằng số dương β sao cho $|s_i(t_1,\ldots,t_n)| \geq \min\{t_1^\beta,\ldots,t_n^\beta\}$ với $i = 1,\ldots,m$ (lưu ý trường hợp toán tử $\mathcal{H}^m_\psi$ thì điều kiện này tự động được thoả mãn), thì $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ được xác định như một toán tử bị chặn từ $\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)$ vào $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ thì điều kiện cần và đủ là $\mathcal{A}_2$ hữu hạn. Hệ quả này chứa hai kết quả là Định lí 5 và Định lí 6 của Gong, Fu và Ma trong [32], hơn nữa để thu được điều kiện cần, các tác giả phải giả thiết $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m$, $p_1 = \cdots = p_m$ và $q_1 = \cdots = q_m$, tuy nhiên kết quả của chúng tôi không cần có giả thiết đó. Tương tự như vậy cho kết quả của Morrey-Herz, các kết quả của chúng tôi thu được trong Định lí 4.1 là thực sự làm mạnh các kết quả trước đó của Gong, Fu và Ma.

Nhận xét 4.4. Định lí 4.1 xem xét cả trường hợp khi $0 < p < 1$, ý tưởng tiếp cận trường hợp này được chúng tôi tham khảo từ công trình của J. Kuang [44], trong đó tác giả đánh giá chuẩn của toán tử V_ψ trong không gian Herz. Chính vì vậy kết quả của chúng tôi là mở rộng hơn và mạnh hơn với kết quả tương ứng thu được trong [32] và là mở rộng cho trường hợp đa tuyến tính của các công trình [12, 20, 32, 44, 48].

4.2.3. Chứng minh kết quả chính

Chứng minh của Định lí 4.1. Giả sử rằng $s_1(t),\ldots,s_m(t) \neq 0$ hầu khắp nơi trong $t \in [0,1]^n$ sao cho (4.3) đúng. Cố định số $k \in \mathbb{Z}$ và xét các hàm $f_i \in M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)$ với $i = 1,\ldots,m$. Áp dụng bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\begin{aligned}
&\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|_{q,\omega} \\
\leq &\int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{C_k} |f_i(s_i(t)x)|^{q_i} \omega_i(x)dx \right)^{1/q_i} \psi(t)dt. \\
\leq &\int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{s_i(t)C_k} |f_i(x)|^{q_i} |s_i(t)|^{-d-\gamma_i} \omega_i(x)dx \right)^{1/q_i} \psi(t)dt
\end{aligned}$$

$$\leq \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}} \right) \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(\int\limits_{s_i(t)C_k} |f_i(x)|^{q_i} \omega_i(x) dx \right)^{1/q_i} \cdot \psi(t) dt.$$

Với mỗi t sao cho $|s_1(t) \cdots s_m(t)| > 0$ tồn tại các số nguyên $\ell_1, \ldots, \ell_m$ sao cho $2^{\ell_i - 1} < |s_i(t)| \leq 2^{\ell_i}$ với $i = 1, \ldots, m$. Đặt $\psi_{\vec{s}}(t) = \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}} \right) \psi(t)$ ta thu được

$$\begin{aligned}
&\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|_{q,\omega} \\
&\leq \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\int\limits_{C_{k+\ell_i-1} \cup C_{k+\ell_i}} |f_i(x)|^{q_i} \omega_i(x) dx \right)^{1/q_i} \psi_{\vec{s}}(t) dt \\
&\leq \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\|f_i \chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i \chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right) \psi_{\vec{s}}(t) dt.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|_{q,\omega} \leq \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\|f_i \chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i \chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right) \psi_{\vec{s}}(t) dt. \quad (4.9)$$

Ta có

$$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|^p_{q,\omega} \right)^{1/p}. \quad (4.10)$$

Bây giờ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Giả sử rằng $1 \leq p < \infty$, để đánh giá chuẩn của $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})$ trên không gian $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$, áp dụng Bổ đề 4.1, bất đẳng thức Hölder và (4.4) ta có:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|^p_{q,\omega} \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left(\int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\|f_i \chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i \chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right) \psi_{\vec{s}}(t) dt \right)^p \right)^{1/p} \\
&\leq \int\limits_{[0,1]^n} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \prod_{i=1}^{m} \left(\|f_i \chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i \chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right)^p \right)^{1/p} \psi_{\vec{s}}(t) dt
\end{aligned}$$

$$\leq \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_i p_i} \left(\|f_i \chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i \chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right)^{p_i} \right)^{1/p_i} \psi_{\vec{s}}(t)dt$$

$$\leq \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_i p_i} \|f_i \chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i}^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}} + \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_i p_i} \|f_i \chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i}^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}} \right\}$$

$$\times \psi_{\vec{s}}(t)dt.$$

Do đó, ta có

$$\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}(\vec{f})\chi_k\|_{q,\omega}^{p} \right)^{1/p}$$

$$\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} 2^{-k_0\lambda_i} \left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_i p_i} \|f_i \chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i}^{p_i} \right)^{1/p_i} + \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_i p_i} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \|f_i \chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i}^{p_i} \right)^{1/p_i} \right\} \psi_{\vec{s}}(t)dt$$

$$\leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(2^{-(\ell_i-1)(\alpha_i-\lambda_i)} + 2^{-\ell_i(\alpha_i-\lambda_i)} \right) \psi_{\vec{s}}(t)dt$$

$$\leq \prod_{i=1}^{m} \left(2^{|\alpha_i-\lambda_i|} + 1 \right) \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)} \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\alpha_i - \frac{d+\gamma_i}{q_i} + \lambda_i} \right) \psi(t)dt.$$

Suy ra

$$\|U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}(\vec{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)} \leq C_{\vec{\alpha},\vec{\lambda}} \cdot \mathcal{A}_1 \cdot \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)}.$$

Vậy $U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}$ bị chặn từ $\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)$ vào $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)$ và chuẩn của nó lớn hơn $C_{\vec{\alpha},\vec{\lambda}} \cdot \mathcal{A}_1$.

Trường hợp 2: Giả sử rằng $0 < p < 1$ và $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ là các số thực khác 0. Từ (4.10) và Bổ đề 4.2, ta có

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}(\vec{f})\chi_k\|_{q,\omega}^{p} \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \left(\int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\|f_i \chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i \chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right) \psi_{\vec{s}}(t)dt \right)^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \left(\int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(2^{(k+\ell_i-1)(\lambda_i-\alpha_i)} + 2^{(k+\ell_i)(\lambda_i-\alpha_i)} \right) \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, \psi_{\vec{s}}(t)dt \right)^p \right)^{1/p}.$$

Do đó

$$\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|^p_{q,\omega} \right)^{1/p}$$

$$\leq \prod_{i=1}^{m} \left(2^{|\alpha_i-\lambda_i|} + 1 \right) \left(\prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)} \right) \left(\int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i} \psi_{\vec{s}}(t)dt \right) \times$$

$$\times \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{(k-k_0)\lambda p} \right)^{1/p}.$$

Vì $\lambda > 0$ nên

$$\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{(k-k_0)\lambda p} = \frac{2^{\lambda p}}{2^{\lambda p}-1}.$$

Vậy

$$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} \leq C_{\vec{\alpha},\vec{\lambda}} \cdot \mathcal{A}_1 \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)} \right).$$

Ngược lại, giả sử $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ xác định như là toán tử bị chặn từ $\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)$ vào $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$, nghĩa là,

$$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} \leq \|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}\|_{\prod\limits_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)}. \tag{4.11}$$

Với mỗi $i = 1, \ldots, m$, đặt

$$f_i(x) = |x|^{-\alpha_i - \frac{d+\gamma_i}{q_i} + \lambda_i}. \tag{4.12}$$

Theo Ví dụ 1.6, Chương 1, ta có

$$\|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)} = \frac{2^{\lambda_i}}{(2^{\lambda_i p_i}-1)^{1/p_i}} \cdot \left(\frac{1-2^{-q_i(\lambda_i-\alpha_i)}}{q_i(\lambda_i-\alpha_i)} \right)^{1/q_i} \cdot (\omega_i(S_d))^{1/q_i}. \tag{4.13}$$

Mặt khác

$$U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})(x) = |x|^{-\alpha+\lambda-\frac{d+\gamma}{q}} \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\alpha_i+\lambda_i-\frac{d+\gamma_i}{q_i}} \psi(t)dt.$$

Vì vậy, ta có

$$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)} = \mathcal{A}_1 \cdot \frac{2^{\lambda}}{(2^{\lambda p}-1)^{1/p}} \cdot \left(\frac{1-2^{-q(\lambda-\alpha)}}{q(\lambda-\alpha)}\right)^{1/q} \cdot (\omega(S_d))^{1/q}. \tag{4.14}$$

Kết hợp (4.11), (4.13) và (4.14), ta thu được (4.5). Vậy Định lí 4.1 được chứng minh. □

Chứng minh của định lí 4.2. Vì không gian Morrey-Herz $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ trở thành không gian Herz $\dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\omega)$ khi $\lambda = 0$, do đó phần (i) của Định lí 4.2 là trường hợp đặc biệt của phần (i) của Định lí 4.1. Để chứng minh phần ii) của Định lí 4.2, giả sử rằng $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ là bị chặn từ $\prod_{i=1}^{m} \dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i)$ vào $\dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\omega)$. Cố định $0 < \epsilon < 1$, với $i = 1, \ldots, m$, đặt

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu} \quad |x| \le 1, \\ |x|^{-\alpha_i-\frac{d+\gamma_i}{q_i}-\epsilon}, & \text{nếu} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Theo Ví dụ 1.5 ta có $f_i \in \dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i)$ và

$$\|f_i\|_{\dot{K}^{\alpha_i,p_i}_{q_i}(\omega_i)} = \frac{1}{(2^{\epsilon p_i}-1)^{1/p_i}} \cdot \left(\frac{2^{q_i(\alpha_i+\epsilon)}-1}{q_i(\alpha_i+\epsilon)}\right)^{1/q_i} \cdot (\omega_i(S_d))^{1/q_i}.$$

Mặt khác,

$$U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})(x) = |x|^{-\alpha-\frac{d+\gamma}{q}-m\epsilon} \int_{E_x} \prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\alpha_i-\frac{d+\gamma_i}{q_i}-\epsilon} \psi(t)dt$$

với E_x là tập con của $[0,1]^n$ sao cho $|s_i(t)x| > 1$. Từ giả thiết $|s_i(t_1, \ldots, t_n)| \ge \min\{t_1, \ldots, t_n\}^{\beta}$, cho ta $[1/|x|^{1/\beta}, 1]^n \subset E_x$ với mỗi $|x| > 1$. Đặt k_0 là số nguyên nhỏ nhất sao cho $2^{(1-k)/\beta} < \epsilon$ với mỗi $k \ge k_0$. Ta có

$\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|^{p}_{\dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\omega)}$

$$\geq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{k\alpha p}\left(\int\limits_{C_k} |x|^{-(\alpha+m\epsilon)q-(d+\gamma)}\left(\int\limits_{[2^{(1-k)/\beta},1]^n}\prod_{i=1}^{m}|s_i(t)|^{-\alpha_i-\frac{d+\gamma_i}{q_i}-\epsilon}\psi(t)dt\right)^q\right.$$

$$\left.\times\,\omega(x)dx\right)^{p/q}$$

$$\geq \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-kpm\epsilon}\right)\left(\frac{2^{q(\alpha+m\epsilon)}-1}{q(\alpha+m\epsilon)}\right)^{\frac{p}{q}}|S_d|_{\omega}^{\frac{p}{q}}\left(\int\limits_{[\epsilon,1]^n}\prod_{i=1}^{m}|s_i(t)|^{-\alpha_i-\frac{d+\gamma_i}{q_i}-\epsilon}\psi(t)dt\right)^p.$$

Mặt khác

$$\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{\dot{K}_{q_i}^{\alpha_i,p_i}(\omega_i)}=\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{(2^{\epsilon p_i}-1)^{1/p_i}}\cdot\left(\frac{2^{q_i(\alpha_i+\epsilon)}-1}{q_i(\alpha_i+\epsilon)}\right)^{1/q_i}\cdot(\omega_i(S_d))^{1/q_i}\right).$$

Cho $\epsilon\to 0$, do Định lý hội tụ bị chặn Lebesgue và các đánh giá trên cho ta (4.8). Vậy ta có điều phải chứng minh. □

4.3. Giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro

Giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro $U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}$, theo nghĩa của Coifmann-Rochberg-Weiss, được xác định như sau.

$$U_{\psi,\vec{s}}^{m,n,\vec{b}}\left(\vec{f}\right)(x):=\int\limits_{[0,1]^n}\left(\prod_{k=1}^{m}f_k\left(s_k(t)x\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\left(b_k(x)-b_k\left(s_k(t)x\right)\right)\right)\psi(t)dt. \tag{4.15}$$

Dựa theo ý tưởng của Tang, Xue, Zhou [52], chúng tôi sẽ xem xét các biểu trưng thuộc lớp hàm Lipschitz, xác định như sau.

Định nghĩa 4.2. Giả sử rằng $0<\beta<1$. Không gian Lipschitz $Lip^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ là tập tất cả các hàm $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ sao cho

$$||f||_{Lip^{\beta}(\mathbb{R}^n)}:=\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\beta}}<\infty. \tag{4.16}$$

4.3.1. Các kết quả chính

Trong phần này tôi phát biểu các kết quả thu được là Định lý 4.3 và hệ quả 4.1 sau

Định lí 4.3. *Cho $\alpha_i>-d$, $1\leq q\leq q_i<\infty$, $0\leq r_i$, $1\leq p_i<\infty$, $0<\beta_i<1$, $0<\beta<1$, $0\leq\lambda_i,\lambda\leq 1$ với $i=1,\ldots,m$, $\alpha=\alpha_1+\cdots+$*

$\alpha_m > -d$, $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_m$, $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}$, và $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}$. Giả thiết rằng $b_i \in Lip^{\beta_i}$ và ω_i thỏa mãn (4.2) với $i = 1, \ldots, m$. Các hàm $s_1(t), \ldots, s_m(t) \neq 0$ hầu khắp nơi $t \in [0,1]^n$ sao cho

$$\int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}+\lambda_i-\alpha_i} |1 - s_i(t)|^{\beta_i} \right) \psi(t)dt < \infty \tag{4.17}$$

thì giao hoán tử $U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}$ xác định như toán tử bị chặn từ $M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}(\omega_1) \times \cdots \times M\dot{K}^{\alpha_m,\lambda_m}_{p_m,q_m}(\omega_m)$ vào $M\dot{K}^{\alpha',\lambda}_{p,q}(\omega)$ khi $0 < p < 1$ và $\lambda > 0$ hoặc khi $1 \leq p < \infty$ và $\lambda \geq 0$. Giả thiết rằng

$$\alpha' = \alpha - \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{i=1}^{m} \frac{d+\gamma_i}{r_i}. \tag{4.18}$$

Khi $m = n = 1$, $\omega_1 = 1$, $s_1(t) \equiv t$ thì $U^{1,1,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}} = U^b_\psi$, ta thu được kết quả sau

Hệ quả 4.1. *Cho $\psi : [0;1] \to [0;\infty)$ là hàm đo được, $0 < \beta < 1$, $b \in Lip^\beta(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq q_2 \leq q_1 < \infty$. Nếu*

$$\mathcal{A} = \int_0^1 t^{-\left(\gamma_1-\lambda-\frac{d}{q_1}\right)} (1-t)^\beta \psi(t)dt < \infty \tag{4.19}$$

thì U^b_ψ bị chặn từ $M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda}_{p,q_1}$ vào $M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda}_{p,q_2}$ với $\alpha_1 = \alpha_2 + \beta + d\left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)$.

Nhận xét 4.5. Trong [52], để thu được tính bị chặn của U^b_ψ từ $M\dot{K}^{\gamma_1,\lambda}_{p,q_1}$ vào $M\dot{K}^{\gamma_2,\lambda}_{p,q_2}$, các tác giả cần điều kiện đủ đối với hàm ψ là

$$\mathcal{C} = \int_0^1 t^{-\left(\gamma_1-\lambda-\frac{d}{q_1}\right)} \psi(t)dt < \infty.$$

Tuy nhiên, với $0 \leq t \leq 1$ thì $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$. Thật vậy, chọn $\psi(t) = \frac{t}{(1-t)^{1+\beta/2}}$, $\gamma_1 - \lambda - \frac{d}{q_1} = 1$ suy ra $\mathcal{C} = \infty$ nhưng $\mathcal{A} < \infty$. Vậy kết quả chúng tôi thu được tốt hơn so với kết quả của Tang, Xue, Zhou [52].

4.3.2. Chứng minh kết quả chính

Để thuận tiện cho việc trình bày chứng minh kết quả, chúng tôi đưa ra các ký hiệu sau

$$\mathcal{B} = \prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_{Lip^{\beta_i}}.$$

$$\widetilde{\psi}(t) = \left(\prod_{i=1}^{m} |1 - s_i(t)|^{\beta_i}\right) \psi(t).$$

$$\overline{\psi}(t) = \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}}\right) \widetilde{\psi}(t).$$

Nếu f và g là các biểu thức, ta viết $f \lesssim g$ nếu tồn tại một hằng số C sao cho $f \leq Cg$.

Chứng minh của định lí 4.3. Với bất kỳ $x \in C_k$ và $b_i \in Lip^{\beta_i}$, ta có

$$\prod_{i=1}^{m} |b_i(x) - b_i(s_i(t)x)| \leq \left(\prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_{Lip^{\beta_i}}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t) - 1|^{\beta_i}\right) \cdot |x|^{\beta_1+\cdots+\beta_m} \tag{4.20}$$

$$\leq \mathcal{B} \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(t) - 1|^{\beta_i}\right) \cdot 2^{k(\beta_1+\cdots+\beta_m)}. \tag{4.21}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
&\|U_{\psi,\vec{s}}^{m,n,\vec{b}}(\vec{f})\chi_k\|_{q,\omega} \\
&= \left(\int_{C_k} \left| \int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^{m} f_i(s_i(t)x)\right) \left(\prod_{i=1}^{m} (b_i(x) - b_i(s_i(t)x))\right) \psi(t)dt \right|^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int_{[0,1]^n} \left(\int_{C_k} \prod_{i=1}^{m} |f_i(s_i(t)x)|^q \prod_{i=1}^{m} |b_i(x) - b_i(s_i(t)x)|^q \omega(x)dx\right)^{1/q} \psi(t)dt \\
&\lesssim \left(\prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_{Lip^{\beta_i}}\right) \int_{[0,1]^n} \left(\int_{C_k} \prod_{i=1}^{m} |f_i(s_i(t)x)|^q \left(\prod_{i=1}^{m} |1 - s_i(t)|^{q\beta_i}\right) \left(\prod_{i=1}^{m} |x|^{q\beta_i}\right)\right. \\
&\left.\times\, \omega(x)dx\right)^{1/q} \psi(t)dt \\
&\lesssim 2^{k(\beta_1+\cdots+\beta_m)}\, \mathcal{B} \int_{[0,1]^n} \left(\int_{C_k} \prod_{i=1}^{m} |f_i(s_i(t)x)|^q \omega(x)dx\right)^{1/q} \widetilde{\psi}(t)dt \\
&\lesssim 2^{k\beta}\, \mathcal{B} \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{C_k} |f_i(s_i(t)x)|^{q_i} \omega_i(x)dx\right)^{\frac{1}{q_i}} \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{C_k} \omega_i(x)dx\right)^{\frac{1}{r_i}} \widetilde{\psi}(t)dt.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng có được nhờ áp dụng bất đẳng thức Hölder. Vì $\omega_i \in \mathcal{W}_{\gamma_i}$ nên

$$\int_{C_k} \omega_i(x)dx \lesssim 2^{k(d+\gamma_i)}. \tag{4.22}$$

Do vậy,

$$\begin{aligned}
&\|U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|_{q,\omega} \\
&\lesssim 2^{k\beta}\,\mathcal{B} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\int\limits_{s_i(t)C_k} |f_i(y)|^{q_i} |s_i(t)|^{-d-\gamma_i} \omega_i(y)dy \right)^{1/q_i} \prod_{i=1}^{m} \omega_i(C_k)^{\frac{1}{r_i}} \widetilde{\psi}(t)dt \\
&\lesssim 2^{k\left(\alpha-\alpha'\right)}\,\mathcal{B} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\int\limits_{s_i(t)C_k} |f_i(x)|^{q_i} \omega_i(x)dx \right)^{\frac{1}{q_i}} \prod_{i=1}^{m} \left(|s_i(t)|^{-\frac{d+\gamma_i}{q_i}} \right) \widetilde{\psi}(t)dt \\
&\lesssim 2^{k\left(\alpha-\alpha'\right)}\,\mathcal{B} \int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\int\limits_{s_i(t)C_k} |f_i(x)|^{q_i} \omega_i(x)dx \right)^{1/q_i} \overline{\psi}(t)dt.
\end{aligned}$$

Vì $s_i(t) \neq 0$ hầu khắp nơi $t \in [0,1]^n$, ta có thể chọn được số nguyên ℓ_i sao cho $2^{\ell_i - 1} < s_i(t) \leq 2^{\ell_i}$. Vậy $s_i(t)x \in C_{k+\ell_i-1} \cup C_{k+\ell_i}$ với mỗi $x \in C_k$. Vì vậy

$$\|U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|_{q,\omega} \tag{4.23}$$

$$\lesssim 2^{k\left(\alpha-\alpha'\right)}\,\mathcal{B} \int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\|f_i\chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i\chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right) \overline{\psi}(t)dt. \tag{4.24}$$

Theo định nghĩa của chuẩn của toán tử trong không gian Morrey-Herz, ta có

$$\|U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha',\lambda}_{p,q}(\omega)} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha'} \|U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|^p_{q,\omega} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.25}$$

Để đánh giá chuẩn của toán tử này, ta chia thành hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Giả sử rằng $1 \leq p < \infty$ và $\lambda \geq 0$. Do Bổ đề 4.1, ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha'} \|U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\chi_k\|^p_{q,\omega} \right)^{1/p} \\
&\lesssim \mathcal{B} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \Big(\int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{m} \left(\|f_i\chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i\chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right) \overline{\psi}(t)dt \Big)^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\lesssim \mathcal{B} \int\limits_{[0,1]^n} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \prod_{i=1}^{m} (\|f_i\chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i\chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i})^p \right)^{\frac{1}{p}} \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \int\limits_{[0,1]^n} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \prod_{i=1}^{m} (\|f_i\chi_{k+\ell_i-1}\|^p_{q_i,\omega_i} + \|f_i\chi_{k+\ell_i}\|^p_{q_i,\omega_i}) \right)^{\frac{1}{p}} \overline{\psi}(t)dt.$$

Từ đó suy ra

$$\|U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha',\lambda}_{p,q}(\omega)} \lesssim \mathcal{B} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \int\limits_{[0,1]^n} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \prod_{i=1}^{m} \Big(\|f_i\chi_{k+\ell_i-1}\|^p_{q_i,\omega_i} + \right. \tag{4.26}$$

$$\left. + \|f_i\chi_{k+\ell_i}\|^p_{q_i,\omega_i} \Big) \right)^{\frac{1}{p}} \overline{\psi}(t)dt. \tag{4.27}$$

Ta có

$$\prod_{i=1}^{m}(a_{i,0}+b_{i,0}) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=0,1} \prod_{i=1}^{m} a_{i,j_i},$$

với tổng được lấy qua tất cả $(j_1,\ldots,j_m)$ với mỗi $j_1,\ldots,j_m \in \{0,1\}$. Do đó, ta có

$$\|U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha',\lambda}_{p,q}(\omega)}$$

$$\lesssim \mathcal{B} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \int\limits_{[0,1]^n} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_m\in\{0,1\}} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\chi_{k+\ell_i-j_i}\|^p_{q_i,\omega_i} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \int\limits_{[0,1]^n} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_m\in\{0,1\}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\chi_{k+\ell_i-j_i}\|^p_{q_i,\omega_i} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{j_1,\ldots,j_m\in\{0,1\}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\chi_{k+\ell_i-j_i}\|^p_{q_i,\omega_i} \right)^{\frac{1}{p}} \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{j_1,\ldots,j_m\in\{0,1\}} \left(\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp_i\alpha_i} \|f_i\chi_{k+\ell_i-j_i}\|^{p_i}_{q_i,\omega_i} \right) \right)^{\frac{1}{p_i}} \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{j_1,\dots,j_m\in\{0,1\}} \left(\prod_{i=1}^m \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda_i} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp_i\alpha_i} \|f_i\chi_{k+\ell_i-j_i}\|_{q_i,\omega_i}^{p_i} \right) \right)^{\frac{1}{p_i}} \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{j_1,\dots,j_m\in\{0,1\}} \left(\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)} \prod_{i=1}^m 2^{(\ell_i-j_i)\lambda_i} \prod_{i=1}^m 2^{(-\ell_i+j_i)\alpha_i} \right) \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{j_1,\dots,j_m\in\{0,1\}} \left(\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)} \right) \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i} \right) \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \left(\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)} \right) \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{j_1,\dots,j_m\in\{0,1\}} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i} \right) \overline{\psi}(t)dt$$

$$\lesssim \mathcal{B} \left(\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)} \right) \int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i} \right) \overline{\psi}(t)dt.$$

Kết hợp với giả thiết (4.17), ta thu được $\int\limits_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i} \right) \overline{\psi}(t)dt$ hữu hạn. Vậy $U_{\psi,\vec{s}}^{m,n,\vec{b}}$ bị chặn từ $M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\omega_1)\times\cdots\times M\dot{K}_{p_m,q_m}^{\alpha_m,\lambda_m}(\omega_m)$ vào $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha',\lambda}(\omega)$.

Trường hợp 2: Giả sử rằng $0 < p < 1$ và $\lambda > 0$, do Bổ đề 4.2 và nhận xét $2^{\ell_i-1} \le |s_i(t)| < 2^{\ell_i}$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{j=0,1} \|f_i\chi_{k+\ell_i-j}\|_{q_i,\omega_i} &\lesssim \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)} \sum_{j=0,1} 2^{(k+\ell_i-j)(\lambda_i-\alpha_i)} \\ &\lesssim 2^{k(\lambda_i-\alpha_i)} |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i} \|f_i\|_{M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\alpha_i,\lambda_i}(\omega_i)}. \end{aligned}$$

Kết hợp với (4.20), ta có

$$\begin{aligned} &\|U_{\psi,\vec{s}}^{m,n,\vec{b}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha',\lambda}(\omega)} \\ &\lesssim \mathcal{B} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \left(\int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^m \left(\|f_i\chi_{k+\ell_i-1}\|_{q_i,\omega_i} + \|f_i\chi_{k+\ell_i}\|_{q_i,\omega_i} \right) \right.\right. \\ &\left.\left. \overline{\psi}(t)dt \right)^p \right)^{1/p} \\ &\lesssim \mathcal{B} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\alpha} \left(\int\limits_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^m \left(2^{(k+\ell_i-1)(\lambda_i-\alpha_i)} + 2^{(k+\ell_i)(\lambda_i-\alpha_i)} \right) \times \right.\right. \end{aligned}$$

$$\times \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)} \overline{\psi}(t)dt\Bigg)^p\Bigg)^{1/p}$$

$$\lesssim \mathcal{B}\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\Bigg(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{kp\lambda}\prod_{i=1}^m\Big(\int\limits_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i}\overline{\psi}(t)dt\Big)^p\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \mathcal{B}\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)} \int\limits_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i}\overline{\psi}(t)dt \times \sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\Bigg(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{(k-k_0)\lambda p}\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Vì $\lambda > 0$, nên chuỗi $\sum\limits_{k=-\infty}^{k_0} 2^{(k-k_0)\lambda p}$ hội tụ và tổng của nó là hằng không phụ thuộc vào k_0. Do đó, ta có

$$\|U^{m,n,\vec{b}}_{\psi,\vec{s}}(\vec{f})\|_{M\dot{K}^{\alpha',\lambda}_{p,q}(\omega)} \lesssim \mathcal{B}\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(\omega_i)} \int\limits_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{\lambda_i-\alpha_i}\overline{\psi}(t)dt.$$

Vậy Định lý 4.3 được chứng minh. □

Kết luận của chương 4

Chúng tôi tìm được một điều kiện cần và một điều kiện đủ đối với lớp hàm trọng $\psi(t)$ để cho toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng bị chặn trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ và tích các không gian Herz thuần nhất có trọng $\dot{K}^{\alpha,p}_{q}(\omega)$. Hơn nữa chúng tôi cũng đưa ra được một điều kiện cần đối với $\psi(t)$ để giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng bị chặn trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega)$ với biểu trưng trong không gian Lipschitz $Lip^{\beta}(\mathbb{R}^d)$. Trường hợp đặc biệt của các kết quả thu được, không chỉ là mở rộng mà là làm mạnh thực sự các kết quả được biết trước đó.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án này chúng tôi đã nghiên cứu tính bị chặn của toán tử loại Hardy và giao hoán tử của nó trên một số không gian hàm. Luận án đã đạt được các kết quả sau:

- Đối với toán tử p-adic Hardy-Cesàro có trọng chúng tôi tìm được chuẩn của toán tử trên không gian p-adic Morrey có trọng $L_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$, không gian p-adic tâm Morrey có trọng $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ và không gian p-adic tâm BMO có trọng $CMO_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Đồng thời chúng tôi cũng xác định được một điều kiện cần và một điều kiện đủ đối với hàm trọng $\psi(t)$ để giao hoán tử $U_{\psi,s}^{p,b}$ bị chặn trên không gian p-adic tâm Morrey có trọng với biểu trưng trong không gian p-adic tâm BMO có trọng.

- Đối với toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng chúng tôi tìm được chuẩn của toán tử trên tích các không gian p-adic Lebesgue có trọng, tích các không gian p-adic Morrey có trọng $L_{\omega}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^d)$ và tích các không gian p-adic tâm Morrey có trong $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$. Thêm vào đó chúng tôi cũng đưa ra được một điều kiện cần và một điều kiện đủ đối với lớp hàm trọng $\psi(t)$ để giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng là bị chặn trên tích các không gian p-adic tâm Morrey có trọng $\dot{B}_{\omega}^{q,\lambda}\left(\mathbb{Q}_p^d\right)$ với biểu trưng trong không gian p-adic tâm BMO có trọng.

- Với toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng chúng tôi tìm được một điều kiện cần và một điều kiên đủ đối với lớp hàm trọng $\psi(t)$ để cho toán tử này bị chặn trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)$ và tích các không gian Herz thuần nhất có trọng $\dot{K}_{q}^{\alpha,p}(\omega)$. Hơn nữa chúng tôi cũng đưa ra được một điều kiện cần đối với $\psi(t)$ để giao hoán tử của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng bị chặn trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\omega)$ với biểu trưng trong không gian Lipschitz $Lip^{\beta}(\mathbb{R}^d)$.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu chuẩn của toán tử đa tuyến tính Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng, không thuần nhất có trọng, tích các không gian Herz thuần nhất có trọng, không thuần nhất, không thuần nhất có trọng và giao hoán tử của nó trên tích các không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng.
- Nghiên cứu chuẩn của toán tử đa tuyến tính p-adic Hardy-Cesàro có trọng trên tích các không gian p-adic Morrey-Herz thuần nhất có trọng, không thuần nhất có trọng, tích các không gian p-adic Herz thuần nhất có trọng, không thuần nhất, không thuần nhất có trọng và giao hoán tử của nó trên tích các không gian p-adic Morrey-Herz thuần nhất có trọng.
- Trường hợp giao hoán tử, việc xác định điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử trên các không gian loại Herz nói chung vẫn là bài toán mở. Câu hỏi đặt ra là với lớp hàm biểu trưng nào, và với điều kiện cần và đủ nào thì các giao hoán tử sẽ bị chặn giữa các không gian loại Herz?

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Nguyen Minh Chuong, Ha Duy Hung, Nguyen Thi Hong (2016), Bounds of $p-$adic weighted Hardy-Cesàro operators and their commutators on $p-$adic weighted spaces of Morrey types, *p-Adic Numbers Ultrametric Analysis, and Applications*, **8(1)**, 31-44.

2. Nguyen Minh Chuong, Nguyen Thi Hong, Ha Duy Hung (2018), Bounds of weighted multilinear Hardy-Cesàro operators in $p-$adic functional spaces, *Frontiers of Mathematics in China*, **13(1)**, 1-24.

3. Nguyen Minh Chuong, Nguyen Thi Hong, Ha Duy Hung (2017), Multilinear Hardy-Cesàro Operator and Commutator on the product of Morrey-Herz spaces, *Analysis Mathematica*, **43(4)**, 547-565.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Minh Chương, Hà Tiến Ngoạn, Nguyễn Minh Trí, Lê Quang Trung (2000), *Phương trình đạo hàm riêng*, NXB Giáo Dục, Hà Nội.

[2] Hà Duy Hưng (2013), *Toán tử tích phân cực đại trên trường địa phương*, Luận án tiến sĩ toán học.

Tiếng Anh

[3] Andersen K. F. (2003), Boundedness of Hausdorff operators on $L^p(\mathbb{R}^n), H^1(\mathbb{R}^n)$ and $BMO(\mathbb{R}^n)$, *Acta. Sci. Math.(Szeged)*, **69**, 409-418.

[4] Alvarez J., Lakey J., Guzmán-Partida M. (2000), Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures, *Collect. Math.*, **51**, 1-47.

[5] Baernstein A., Sawyer E. (1985), *Embedding and Multiplier Theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **318**.

[6] Beurling A. (1964), Construction and analysis of some convolution algebras, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **14**, 1-32.

[7] Brown G., Móricz F. (2002), Multivariate Hausdorff operators on the spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **271**, 443-454.

[8] Chen J. C., Fan D. S., Zhang C. J. (2012), Multilinear Hausdorff operators and their best constants, *Acta Math. Sin.*, **28(8)**, 1521-1530.

[9] Chen J. C., Fan D. S., Li J. (2012), Hausdorff operators on function spaces, *Chin. Annal. Math. Ser. B*, **33**, 537-556.

[10] Chuong N. M., Hung H. D. (2010), Maximal functions and weighted norm inequalities on Local Fields, *Appl. Comput. Harmon. Anal.,* **29**, 272–286.

[11] Chuong N. M., Hung H. D. (2014), Bounds of weighted Hardy-Cesàro operators on weighted Lebesgue and BMO- spaces, *Integral Transforms Spec. Funct.,* **25(9)**, 697-710.

[12] Chuong N. M., Duong D. V., Hung H. D. (2016), Bounds for the weighted Hardy-Cesàro operator and its commutator on Morrey-Herz type spaces, *Z. Anal. Anwend.,* **35(4)**, 489–504.

[13] Chuong N. M., Duong D. V. (2016), The p-Adic weighted Hardy-Cesàro operators on weighted Morrey-Herz space, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.,* **8(3)**, 65-82.

[14] Coifman R. R., Rochberg R., Weiss G. (1976), Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.,* (2), **103**, 611-635.

[15] Dung T. T. (2014), Generalized weighted Hardy-Cesàro operators and their commutators on weighted Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.,* **412**, 1025-1035.

[16] Edmunds D. E., Evans W. D. (2004), Hardy operators, function spaces and embeddings. *Springer Monographs in Mathematics*, Springer-Verlag.

[17] Faris W. G. (1976), Weak Lebesgue spaces and quantum mechanical binding, *Duke Math. J.,* **43**, 365-373.

[18] Fefferman C. (1971), Characterizations of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (4), 587-588.

[19] Fu Z. W., Liu Z. G., Lu S. Z., Wang H. B. (2007), Characterization for commutators of n-dimensional fractional Hardy operator, *Sci. in China Series A: Math.*, **50**, (10), 1418–1426.

[20] Fu Z. W., Lu S. Z. (2008), A remark on weighted Hardy-Littlewood averages on Herz spaces, *Advances in Math.,* **37**, 632–636.

[21] Fu Z. W. (2008), $\lambda-$Central BMO estimates for commutators of $n-$dimensional Hardy operators, *J Inequal. Pure Appl. Math.,* **9(4)**, 5-pages.

[22] Fu Z. W., Lu S. Z. (2009), Commutators of generalized Hardy operators, *Math. Nachr.,* **282**(6), 832–845.

[23] Fu Z. W., Liu Z. G., Lu S. Z. (2009), Commutators of weighted Hardy operators on $\mathbb{R}^n$, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **137(10)**, 3319-3328.

[24] Fu Z. W., Lu S. Z. (2010), Weighted Hardy operators and commutators on Morrey spaces, *Front. Math. China.,* **5(3)**, 531–549.

[25] Fu Z. W., Lu S. Z., Zhao F. (2011), Commutators of $n-$dimensional rough Hardy operators, *Science China Math.*, **54(1)**, 95-104.

[26] Fu Z. W., Grafakos L., Lu S. Z., Zhao F. Y. (2012), Sharp bounds for $m-$Linear Hardy and Hilbert operators, *Houston J. Math.*, **38(1)**, 225-244.

[27] Fu Z. W., Lu S. Z., Yuan W. (2012), A weighted variant of Riemann-Liouville fractional integral on $\mathbb{R}^n$, *Abstr. Appl. Anal.*, **2012**, 18 pages

[28] Fu Z. W., Wu Q. Y., Lu S. Z. (2013), Sharp estimates of $p-$adic Hardy and Hardy-Littlewood-pólya operators, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **29**, 137-150.

[29] Fu Z. W., Gong S. L., Lu S. Z., Yuan W. (2015), Weighted multilinear Hardy operators and commutators, *Forum Math.,* **27(5)**, 2825–2851.

[30] Grafakos L., Li X., Yang D. (1998), Bilinear Operators on Herz-Type Hardy Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **350(3)**, 1249-1275.

[31] Grafakos L. (2011), Multilinear operators in Harmonic analysis and partial differential equations, *Kyoto University Workshop.*

[32] Gong S., Fu Z. W., Ma B. (2014), Weighted multilinear Hardy operators on Herz-type spaces, *The Sci. World. J.,* **2014**, ArticleID 420480.

[33] Hardy G. H. (1920), Note on a theorem of Hilbert, *Math. Zeit.,* 6(3/4): 314-317.

[34] Hung H. D. (2014), $P-$adic weighted Hardy-Cesàro operator and an application to discrete Hardy inequalities, *J. Math. Anal. Appl.,* **409**, 868-879.

[35] Hung H. D., Ky L. D. (2015), New weighted multilinear operators and commutators of Hardy-Cesàro type, *Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed.,* **35B(6)**, 1411-1425.

[36] John F., Nirenberg L. (1961), *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure and Appl. Math., **14**, 415-426.

[37] Kenig C., Stein E. M. (1999), Multilinear estimates and fractional integration, *Math. Res. Lett.,* **6**, 1–15.

[38] Khrennikov A. Y. (1994), p-adic valued distributions in mathematical physics, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht-Boston-London.

[39] Kozyrev S. V. (2002), Wavelet analysis as a $p-$adic spectral analysis, *Izvestia Akademii Nauk, Seria Math.,* **66(2)**, 149-158.

[40] Kochubei A. (2014), Radial solutions of non-Archimedean pseudo-differential equations, *Pacif. J. Math.,* **269**, 355-369.

[41] Kim Y. C. (2009), Carleson measures and the BMO space on the $p-$adic vector space, *Math. Nachr.,*, **282**, 1278-1304.

[42] Komori Y., Shirai S. (2009), Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, *Math. Nachr.,* **282(2)**, 219-231.

[43] Kufner A., Maligranda L., Persson L. (2006), The prehistory of the Hardy inequality, *Am. Math. Mon.*, **113(8)**,715-732.

[44] Kuang J. (2008), The norm inequalities for the weighted Cesaro mean operators, *Comput. Math. Appl.*, **56(10)**, 2588-2595.

[45] Liflyand E., Möricz F. (2000), The Hausdorff operators is bounded on the real Hardy space $H^1(\mathbb{R})$, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **128**, 1391-1396.

[46] Lerner A. K., Liflyand E. (2007), Multidimensional Hausdorff operators on the real Hardy space, *J. Aust. Math. Soc.* ,**83**, 79-86.

[47] Muckenhoupt B., Wheeden R. (1976), Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform, *Studia Math.*, **54(3)**, 221-237.

[48] Liu Z. G., Fu Z. W. (2006), Weighted Hardy-Littlewood averages on Herz spaces. *Acta Math. Sin.*, **49**, 1085-1090.

[49] Lin X. Y., Sun L. J. (2012), Some estimates on the Hausdorff operator, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **78**, 669–681.

[50] Lu S. Z., Xu L. F. (2005), Boundedness of rough singular integral operators on the homogeneous Morrey-Herz spaces, *Hokkaido Math. J.*, **34**, 299–314.

[51] Rim K. S., Lee J. (2006), Estimates of weighted Hardy-Littlewood averages on the $p-$adic vector space, *J. Math. Anal. Appl.,* **324**, 1470-1477.

[52] Tang C., Xue F., Zhou Y. (2011), Commutators of weighted Hardy operators on Herz-type spaces, *Ann. Pol. Math.*,**101(3)**, 267–273.

[53] Taibleson M. (1975), Fourier analysis on local fields, *Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton.*

[54] Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I. (1994), p-adic analysis and mathematical physics, *World Scientific.*

[55] Wu Q. Y. (2012), Boundedness for commutators of fractional $p-$adic Hardy operators, *J. Ineq. Appl.*, **2012**:293

[56] Wu Q. Y., Fu Z. W. (2017), Weighted p-adic Hardy operators and their commutators on p-adic central Morrey spaces, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **40**, 635–654

[57] Wu Q. Y., Mi L., Fu Z. W. (2013), Boundedness of p-adic Hardy operators and their commutators on p-adic central Morrey and BMO spaces, *J. Funct. Spaces Appl.,* **2013**, 10 pages.

[58] Xiao J.(2001), L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood Averages, *J. Math. Anal. Appl.*, **262**, 660-666.

[59] Wu Q. Y., Mi L., Fu Z. W. (2012), Boundedness for commutators of fractional p-adic Hardy operators, *J. Ineq. Appl.*, **2012**:293.

[60] Wu X. (2015), Necessary and sufficient conditions for generalized Hausdorff operators and commutators, Ann. Funct. Anal., **6(3)**, 60-72.

[61] Yuan W., Sickel W., Yang D. (2010), Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel, Lecture Notes in Math., 2005, *Springer, Berlin, Germany,.*

[62] Zhao F. Y., Fu Z. W., and Lu S. Z. (2012), Endpoint estimates for n-dimensional Hardy operators and their commutators, *Sci. China Math.*, **55(10)**, 1977-1990.